Je m'entraîne en Mathématiques

Exercices & Problèmes

+

Corrigés

Terminales C, E

Je m'entraîne en Mathématiques

Je m'entraîne en Mathématiques

Exercice 1.

1. *On considère le nombre complexe z de module égal à 1 et d'argument θ avec $\theta \in]0\ ;\ \pi[$.*

✓ *Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes :*

• $\overline{z}$ • $1+z$ • $1-z$ • $(1-z)^2$ • $\frac{(1-z)^2}{\overline{z}(1+z)}$

2. *Soit* $P(z) = 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2$

   a- *Démontrer que si z est élément de $\mathbb{C}$–$\{0\}$ est une racine de P alors $\overline{z}$ et $\frac{1}{z}$ sont aussi des racines de P.*

   b- *Calculer $P(1+i)$ puis résoudre l'équation $P(z) = 0$.*
   Écrire P sous forme de produit de deux polynômes de degré deux.

3. *Pour tout nombre complexe z différent de 2, on définit le nombre complexe* $Z = \frac{2z-1}{z-2}$

   a- *Écrire en fonction de $x = Re(z)$ et de $y = Im(z)$ les parties réelles et imaginaires de Z.*

   b- *Déterminer et représenter l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.*

   c- *On considère les points $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $B\,(2, 0)$*

   ✓ *Définir une condition suffisante sur Z pour que le triangle ABM soit rectangle en M (M étant le point d'affixe z).*

Exercice 2. *On considère l'application*

$$f\ :\ \mathbb{C}\text{–}\{1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

On note $f(z) = Z$ et m, M les points d'affixes respectifs z et Z. A et A' les points d'abscisses respectives 1 et -1. On pose $z = x+iy$ et $Z = X+iY$ avec x, y, X, Y des réels.

1. *Calculer X et Y en fonction de x et y. En déduire l'ensemble des points m tels que :*

   a- *Z soit réel*

   b- *Z soit imaginaire pur*

2. a- *Déterminer l'ensemble des points m tels que $|Z| = 1$*

   b- *Déterminer l'ensemble (C_k) des points m tels que $|Z| = k$ avec k un réel.*

3. *Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des points m du plan orienté tels que $arg\,(f\,(z)) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in Z$.*

Exercice 3. *Soient a, b, c trois réels.*
Peut-on trouver un réel x tels que les réels $a+x$, $b+x$, $c+x$ soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique ?

Application :
On prend $a = 1$, $b = 7$, $c = 31$

Démontrer que si a, b et c pris dans cet ordre sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique, alors le problème posé a toujours de solution.

Problème 1. *On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par* $f(x) = -\exp(x-1) + \frac{1}{x}$

1. *Étudier les variations de f.*

2. a- *Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique dans $\mathbb{R}^*$. Calculer $f(1)$ et en déduire le signe de $f(x)$.*

   b- *Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$.*

3. *Démontrer que la restriction g de f à $\mathbb{R}_+^*$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$*
   ✓ *Représenter le graphe de g^{-1}*

4. *En étudiant les variations de la fonction h définie par*

$$h(x) = -\exp(x-1) - x + \frac{1}{x},$$

démontrer que la courbe (C) rencontre la droite (Δ) : $y = x$ en deux points d'abscisses respectives α et β telles que $\alpha < 0 < \beta$

✓ *Vérifier que $-2 < \alpha < -1$*

• *On considère à présent la suite (u_n) définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ si } n \geq 0 \end{cases}$$

Je m'entraîne en Mathématiques

5. *Démontrer que pour tout n, $u_n < 0$.*

6. *Démontrer que si $u_n < \alpha$ alors $u_{n+1} > \alpha$ et que si $u_n > \alpha$ alors $u_{n+1} < \alpha$*

7. *On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$*

   a- *Déduire de **6.** que $v_n < \alpha$ et que $w_n > \alpha$*

   b- *Étudier le sens de variation des suites (v_n) et (w_n).*

   ✓ *En déduire qu'elles sont convergentes.*

8. *Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ??*

Exercice 4. *Soit dans $\mathbb{C}$ le polynôme P, défini pour tout $z \in \mathbb{C}$ par :*

$$P(z) \ = \ z^3 - 2(1+i)z^2 + (i-4)z + 9 - 7i$$

1. *Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une racine z_0 dont le point image dans le plan complexe appartient à la droite (Δ) : $y + x = 0$ à preciser.*

2. *On pose $z_0 = 1 - i$*

   a- *Déterminer le polynôme Q tel que : $\forall z \in \mathbb{C}\ P(z) = (z - z_0)Q(z)$*

   b- *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.*
   On désigne par z_1, z_2 les autres racines de P telles que $|z_1| < |z_2|$

3. *Soit dans le plan le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$ les points A, B et C d'affixes respectives z_0, $-2 + i$, et $3 + 2i$.*

   a- *Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.*

   b- *Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.*

   c- *Déterminer les réels a, b et c tels que l'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ soit celle du cercle circonscrit au triangle ABD.*

4. *Soit $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$. On pose $u = z_0 z_3$ et $v = \frac{z_3}{z_0}$*

   a- *Écrire z_0, z_3, u et v sous forme trigonométrique.*

   b- *Écrire u sous forme algébrique puis en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$*

   c- *Donner la valeur algébrique de v^{2014}.*

Exercice 5. *On considère la suite (I_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :*

$$I_n \ = \ \begin{cases} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x}\,dx & \text{si } n \ = \ 0 \\ \int_0^{\frac{1}{2}} x^n\sqrt{1-2x}\,dx & \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. a- *Calculer I_0.*

   b- *A l'aide d'un changement de variable affine, calculer I_1.*

2. a- *Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :*

$$(5+2n)I_{n+1} = (n+1)I_n$$

   b- *En déduire I_2*

3. a- *Étudier le sens de variation de la suite (I_n)*

   b- *Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :*

$$0 \ \leq I_n \ \leq \ \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

   c- *En déduire que la suite (I_n) est convergente et calculer sa limite.*

Exercice 6. *On considère un dé tétraédrique équilibré dont les faces portent les inscriptions 1, -1, 0, 2. On appelle résultat d'un lancer le nombre que porte la base.*

Le plan (P) étant muni d'un repère orthonormé $(O;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$, soit l'équation (E) d'inconnue le couple (x, y) :

$$(E) : \ ax + by + a - b = 0$$

Le coefficient a est le résultat du premier lancer du dé et le coefficient b est le résultat du second lancer du dé.

1. *Quelle est la probabilité pour que (E) soit une droite ?*

2. *Quelle est la probabilité pour que (E) soit l'équation de la droite $(\Delta_1) : \ x + y = 0$?*

3. *Quelle est la probabilité pour que (E) soit l'équation de la droite de (P) perpendiculaire à la droite $(\Delta_2) : \ 2x - y + 5 = 0$?*

Je m'entraîne en Mathématiques

4. *Quelle est la probabilité pour que (E) soit l'équation d'une droite parallèle à (Δ_1) ?*

Exercice 7. *L'espace E est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$. On considère le point $A(-1,1,0)$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u} = -2m\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{w} = (m-1)\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ avec m un réel.*

1. *Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont non colinéaires.*
2. *Déterminer un équation cartésienne du plan (P_m) passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{w}$*
3. a- *Démontrer que tous les plans (P_m) contiennent une droite (D).*
   b- *Donner un repère de (D)*

Exercice 8. *Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$.*

On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z $(z \neq -1)$ du plan associe le point M' d'affixe z' telles que :

$$z' = \frac{-iz-2}{z+1}$$

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = -1$, $b = 2i$ et $c = -i$

1. *Soit C' l'image du point C par f*
   - *Déterminer l'affixe c' du point C' sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.*
2. *Calculer l'affixe d du point D ayant pour image le point D' d'affixe $d' = \frac{1}{2}$.*
3. *Pour tout nombre complexe z different de -1, on note p le module de $(z+1)$ (c'est à dire $p = \mid z+1 \mid$) et p' le module de $(z'+i)$ (c'est à dire $p' = \mid z'+i \mid$)*
   a- *Démontrer que, pour tout complexe z différent de -1, on a : $p \times p' = \sqrt{5}$*
   b- *Si le point M appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 2, montrer alors que $M' = f(M)$ appartient au cercle (C') dont on précisera le centre et le rayon.*
4. *Pour tout nombre complexe z different de -1, on considère le nombre complexe*

$$\mu = \frac{z-2i}{z+1}$$

   a- *Interpréter géométriquement l'argument du nombre complexe μ.*
   b- *Montrer que $z' = -i\mu$*
   c- *Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z telle que z' soit un réel non nul*
   d- *Vérifier que le point D appartient aux ensembles (C) et (F)*
5. *Représenter les ensembles (C), (C') et (F) en prenant 4cm pour unité graphique*

Exercice 9.

1. *On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$*
   a- *Démontrer que $1 + j + j^2 = 0$*
   b- *Soit un triangle MNP du plan complexe. On note m, n, p les affixes respectives des points M, N, P*
   - *Démontrer l'équivalence des trois propositions suivantes*
   (1) *Le triangle MNP est équilatéral direct*
   (2) $\frac{n-p}{m-n} = j$
   (3) $m + jn + j^2p = 0$
2. *Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$, on définit l'application f de (P) vers (P) par :*

$$f(M) = M' \text{ si et seulement si } z' = \frac{z+i}{z-2} \text{ avec } M(z) \text{ et } M'(z')$$

   a- *Quel est le seul point A de (P) à ne pas avoir d'image par f ?*
   b- *Quel est le seul point B de (P) à ne pas avoir d'antécédent par f ?*
   c- *Quelle est l'image de l'axe $(O;\ \vec{v})$ par f ?*
   d- *Quelle est l'image du cercle de centre O et de rayon $R = 1$ par f ?*
   e- *Quel est l'ensemble des points $M(z)$ par f tel que z', affixe de $f(M)$ soit réel ?*

Exercice 10.

1. *Pour tout nombre complexe z on pose :*

$$A(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

   a- *Vérifier que, si $z \neq 1$ alors $A(z) = \frac{z^5-1}{z-1}$*

Je m'entraîne en Mathématiques

b- On suppose que z est le nombre complexe de module 1 tel que $\arg(z) = \frac{2\pi}{5}$

- *Calculer $A(z)$ et en déduire la valeur du réel :*

$$T = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$$

- *Démontrer que l'on a :*

$$\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-2 \text{ et } \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

2. Déduire de ce qui précède, la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Problème 2. ***Partie A***

On considère la fonction

$$g : \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$$

1. a- Déterminer l'ensemble de définition de g

b- Étudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition

⊗ *Pour la limite en -1 on pourra remarquer que $g(x) = \frac{2x-(1+x)\ln(1+x)}{1+x}$*

2. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation

3. a- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]1;+\infty[$ une solution unique notée α

b- Montrer que $3,8 < \alpha < 4$. Pour la suite on prendra $3,9$ comme une valeur approchée de α à 10^{-1} près

4. Préciser suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$

⊗ *On remarquera que $g(0) = 0$*

Partie B

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} & si\ x > 0 \end{cases}$$

1. a- Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$

b- Étudier la dérivabilité de f à droite en 0

2. Montrer que pour tout réels x strictement positif, on a: $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}g(x)$

3. a- Calculer la limite de f en $+\infty$

b- Dresser le tableau de variation de f

c- Montrer que $f(\alpha) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$

4. Le plan étant rapporté à un repère orthogonal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$, on prendra pour unités : 1cm sur l'axe $(O;\ \vec{i})$ et 10cm sur l'axe $(O;\ \vec{j})$

★ *Construire la courbe (C) représentative de f*

Partie C

Dans cette partie, on se propose de déterminer l'aire A en unités d'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et la droite d'équation $x = 1$ et $x = 0$

1. a- Démontrer que la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par

$$f_1(x) = \sqrt{x}\ln(1+x)$$

est dérivable en 0

b- Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par

$$\varphi(x) = 2\sqrt{x}\ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}\,dt$$

Montrer que φ est dérivable en tout point de $[0;+\infty[$ et que $\varphi'(x) = f(x)$

2. En déduire que $A = 2\ln(2) - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}\,dt$

3. Calcul de l'intégrale $\int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}\,dt$

- *Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par*

$$h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}\,dt$$

et k la fonction définie sur $I = \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par

$$k(\theta) = \tan^2(\theta)$$

Je m'entraîne en Mathématiques

a- *Calculer* $(h \circ k)(0)$

b- *Prouver que pour* θ *appartenant à* I, *on a* $(h \circ k)'(\theta) = 4\tan^2(\theta)$

c- *Déterminer une primitive de* $(h \circ k)'$

$\otimes$ *On remarquera que* $\tan^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta) - 1$

- *Donner l'expression de* $h \circ k$

d- *Calculer* $h(1)$

4. *Déduire des résultats précédents la valeur exacte de* A

Exercice 11. *Le plan complexe* (P) *est rapporté à un repère orthonormé direct* $(O;\ \vec{u}\ \vec{v})$. *On appelle* A *le point d'affixe* 1. *On note*

- $\mathbb{C}_1$ *l'ensemble* $\mathbb{C}$–$\{1\}$
- P_1 *le plan* (P) *privé de* A

Soit

$$t\ :\ \mathbb{C}_1 \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto\ t(z) = \frac{1}{z-1}$$

et soit

$$T\ :\ P_1 \longrightarrow (P)$$
$$m(z) \longmapsto\ M(Z),\ \ Z = t(z)$$

1. a- *On pose* $z_0 = t(4 + i\sqrt{3})$

- *Donner l'expression algébrique et la forme exponentielle de* z_0

b- *Déterminer les complexes* z_1 *et* z_2 *vérifiant l'équation* $t(z) = -z$

- *Donner les formes algébriques et exponentielles de* z_1 *et* z_2

2. *On pose* $z = x + iy$ *et* $Z = X + iY$ *où* x, y, X, Y *sont des réels et* $Z = t(z)$

a- *Exprimer* X *et* Y *en fonction de* x *et* y

b- *Quel est l'ensemble des valeurs de* z *pour lesquelles* $t(z)$ *est réel ?*

3. *On considère pour* $x \in [-1;1[$, *la courbe* (γ) *d'équation* $y = \sqrt{1-x^2}$

a- *Quelle est la nature géométrique de* (γ) *?*

b- *Soit* φ *l'application de* $[-1;1[$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $\varphi(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

- *Calculer* $\varphi'(x)$
- *Donner le tableau de variation de la fonction* φ
- *Quelle est l'image par* φ *de l'intervalle* $[-1;1[$

c- *On considère le point* m *de* (γ) *d'affixe* $z = x + i\sqrt{1-x^2}$ *avec* $x \in [-1;1[$

Soit $M = T(z)$ *d'affixe* $Z = X + iY$

d- *Calculer* X. *En déduire que le point* M *appartient à une courbe* (Δ) *que l'on précisera*

e- *Calculer* Y *en fonction de* $\varphi(x)$. *En déduire* $T(\gamma)$, *image de la courbe* (γ) *par* T

Problème 3. *Le plan est muni du repère orthonormé* $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$, g *et* h *sont des applications de* $]-1;+\infty[$ *vers* $\mathbb{R}$ *définies par :*

$$g(x) = \frac{x^2 + x + 2\ln(1+x)}{x+1} \quad ; \quad h(x) = (x+1)^2 + 2 - 2\ln(x+1)$$

Partie A

1. *Calculer* $h'(x)$. *En déduire que* h *admet un minimum. Quel est le signe de* $h(x)$ *?*

2. *Étudier les variations de* g

3. *Démontrer que la droite* (D) *d'équation* $y = x$ *est asymptote à la courbe* (C) *représentative de* g *dans le repère* $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$

Étudier la position de (C) *par rapport à* (D)

4. *Déterminer la tangente* (T) *à* (C) *en* 0

5. *Démontrer qu'il existe un point unique* A *de* (C) *où* (C) *admet une tangente* (T') *parallèle à* (D). *Déterminer les coordonnées de* A

6. *Construire* (C), (T) *et* (T')

Partie B

7. *Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre* m, *du nombre de solutions de l'équation :*

$$g(x) = x + m$$

Je m'entraîne en Mathématiques

8. *Justifier le fait que g est une bijection de $]-1;+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera*

   Tracer dans le plan, muni du même repère qu'à la ***Partie A*** *la courbe (Γ) représentative de g^{-1}*

Exercice 12. *Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} & si\ x \in]-\infty;0[\\ \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) & si\ x \in [0;1[\cup]1;+\infty[\end{cases}$$

Soit (C) la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$

1. *La fonction f est-elle continue en 0 ?*
2. a- *Démontrer que pour $0 < x < 1$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$*
   b- *Étudier la dérivabilité de f en 0*
   c- *Étudier le signe de $f(x) - 2x$ sur $]-\infty;0[$*
   Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?
3. *Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f et étudier les variations de f*
4. *Tracer la courbe (C)*
5. *Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [0;1[$*
   a- *Démontrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera*
   b- *Démontrer que :*
   $$\forall x \in J,\quad g^{-1}(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$$

Problème 4. *L'espace (E) est orienté et muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$. (P) désigne le plan de repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$. Les coordonnées d'un point variable M sont notées respectivement (x, y) dans le repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$ et $(x,\ y,\ z)$ dans le repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$.*

Partie A

1. *Soit la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{1}{4}} - x & si\ x \leq 1 \\ (x-1)\ln(x-1) - x & si\ x > 1 \end{cases}$$

   a- *Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point d'abscisse $x_0 = 1$*
   b- *Achever l'étude des variations de f*
   c- *Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement deux solutions a et b telles que $0 < b < \frac{1}{2}$ et $\frac{9}{2} < a < 5$*
2. *Soit l'application*

$$\begin{array}{rccl} g & : &]-\infty;2] & \longrightarrow & [-2;+\infty[\\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

   a- *Montrer g admet une bijection réciproque*
   b- *Déterminer l'ensemble de dérivabilité de g^{-1}*

Partie B

3. *On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan (P) muni du repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$*
   a- *Étudier la position relative de (C) par rapport à la droite d'équation $y = -x$*
   b- *Étudier les branches infinies de (C)*
   c- *Construire (C) ainsi que la courbe (C') représentative de g^{-1}*

Partie C

Soit m un paramètre réel strictement supérieur à 1. On désigne par (P_m) et (Q_m) les plans de (E) d'équations respectives $(m-1)x + my + z + 1 = 0$ et $x\ln(m-1) - y + 2 = 0$

4. *Déterminer l'ensemble des valeurs de m telles que les plans (P_m) et (Q_m) soient perpendiculaires*
5. *On suppose $m = a$ (a étant le nombre réel déterminé à la question* ***1.c****).*

Je m'entraîne en Mathématiques

Soient les droites (D_1) et (D_2) de représentation paramétrique respectives :

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= t\ln(a-1)+2 \qquad (t\in\mathbb{R}) \\ z &= \frac{-2a^2+2a-1}{a-1}t-2a-1 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} x &= (a-1)t'+1 \\ y &= at'+\frac{3a-2}{a-1} \qquad (t'\in\mathbb{R}) \\ z &= t'-\frac{4a^2-3a}{a-1} \end{cases}$$

Démontrer que :

a- Les droites (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires

b- $(P_m)\cap(Q_m) = (D_1)$

On désigne par (S_1) et (S_2) les réflexions de plans respectifs (P_m) et (Q_m), par d le demi-tour d'axe (D_2)

c- Démontrer que $S_1\circ S_2\circ d$ est un demi-tour. En préciser une représentation paramétrique de l'axe

Exercice 13. *On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par :*

$$x_0 = 1, \qquad y_0 = 8 \qquad et \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n+\frac{1}{3}y_n+1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n+\frac{8}{3}y_n+5 \end{cases}$$

1. *a- Montrer par récurrence que, les points M_n de coordonnées (x_n, y_n) sont sur la droite (Δ) dont une équation est $5x-y+3=0$*

   b- En déduire que $x_{n+1} = 4x_n+2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2. *a- Montrer par récurrence que, tous les x_n sont des entiers naturels*

   b- En déduire que, tous les y_n sont aussi des entiers naturels

3. *Montrer que :*

   a- x_n est divisible par 3 si et seulement si, y_n est divisible par 3

   b- Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux

4. *a- Montrer par récurrence que, $x_n = \frac{1}{3}(5.4^n-2)\ \forall\ n\ \in\mathbb{N}$*

   b- En déduire que 5.4^n-2 est un multiple de 3 pour tout entier naturel n

Exercice 14.

1. *En utilisant la formule de Moivre,*

♣ *Exprimer $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.*

♣ *En déduire que :*

$$\sin(5x) = 16\sin^5(x)-20\sin^3(x)+5\sin(x)$$

2. *En posant $x=\frac{\pi}{5}$ puis $x=\frac{2\pi}{5}$, Justifier que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin(\frac{2\pi}{5})$ sont solutions de l'équation,*

$$(E):\ 16u^4-20u^2+5=0$$

3. *a- Résoudre dans C l'équation : $z^5 = \frac{9\sqrt{3}}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)$ (1)*

   b- On désigne par A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les images de solutions de (1) dans le plan complexe d'origine O (unité 4cm), placer ces points

   ♣ *Quelle est la nature du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4$*

   c- Calculer la distance A_0A_1. En déduire le périmètre de $A_0A_1A_2A_3A_4$

Exercice 15.

1. *Décomposer 319 en produit de facteurs premiers*

2. *Démontrer que si x et y sont des entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour $3x+5y$ et $x+2y$*

3. *Résoudre dans $\mathbb{N}^{*2}$ le système :*

$$\begin{cases} (3a+5b)(a+2b) &= 1276 \\ ab &= 2PPCM(a,b) \end{cases}$$

Exercice 16. *Soit n un entier naturel non nul. On considère les nombres a et b définis par*

$$a = 2n+3 \text{ et } b = 5n-2$$

1. *Montrer que tout diviseur commun à a et b est un diviseur de 19*

2. *Déterminer les entiers naturels n pour lesquels $PGCD(a,b)=19$*

Exercice 17.

1. *On considère dans IN les entiers $\overline{20}$; $\overline{33}$; $\overline{1100}$ écrits en base a*

Je m'entraîne en Mathématiques

Quelle est cette base sachant que $\overline{20} \times \overline{33} = \overline{1100}$

2. *On considère l'entier naturel* $A = \overline{5x23}$ *écrits dans la base* 6

   a- *En remarquant que* $6 \equiv -1[7]$, *montrer que* $A \equiv x - 4[7]$

   En déduire la valeur de x *pour laquelle* A *est divisible par* 7

   b- *Montrer que* $A \equiv x[5]$

   Déterminer la valeur de x *pour que* A *est divisible par* 5

   c- A *peut-il être divisible par* 35 *?*

Problème 5.

A/

L'espace E *étant muni d'un repère orthonormé direct* $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *soient* A, B, C *et* I *des points de* E. *On désigne par* G *le barycentre des points pondérés* $((A, 3), (B, 1), (C, -1))$ *et on considère une droite* (D) *de* E *de repère* $(I; \vec{u})$, *ne passant pas par le point* G. *Soit un point quelconque* M *de* E *et* H *le projeté orthogonal de* M *sur la droite* (D).

Soit (P) *le plan contenant le point* G *et la droite* (D). m *étant un paramètre réel différent de* 3, *on considère l'ensemble* (Γ_m) *des point* M *de* E *vérifiant la relation :*

$$\left(3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right)^2 = 3(m-3)^2 \left(\overrightarrow{MI} \wedge \vec{u}\right)^2$$

On pose $(C_m) = (\Gamma_m) \cap (P)$

1. a- *Démontrer que, pour tout point* M *de* E, *on a :* $\overrightarrow{MH} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{MI} \wedge \vec{u}$

   b- *En déduire que* (C_m) *est une conique du plan* (P) *dont on précisera la nature suivant les valeurs de* m

Dans toute la suite, on suppose les points A; B, C, *et* I *de coordonnées respectives* $(2, 0, 1)$, $(1, 2, -1)$, $(7, 5, -1)$ *et* $(1, 2, 0)$ *et le vecteur* $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. *Soit* G_1 *le projeté orthogonal du point* G *sur la droite* (D)

2. a- *Vérifier que le point* G *n'appartient pas à la droite* (D)

   b- *Déterminer les coordonnées du point* G_1

3. *Déterminer une équation cartésienne du plan* (P)

4. *On suppose que* $m = 2$

   a- *Déterminer les coordonnées du sommet de* (C_2)

   b- *Donner une représentation paramétrique de l'axe de* (C_2)

B/

On suppose $m = 5$

5. a- *Préciser l'excentricité de* (C_5)

   b- *Déterminer les coordonnées des sommets* S_1 *et* S_2 *et du centre* Ω *de* (C_5)

6. *On muni le plan* (P) *d'un repère orthonormé* $(\Omega; \vec{u_0}, \vec{v_0})$, *où* u_0 *est un vecteur directeur de l'axe focal de* (C_5)

   a- *Calculer* $\frac{(S_1S_2)^2}{4}$ *et en déduire que* (C_5) *est l'ensemble des points* M *de* (P) *dont les coordonnées* (X, Y) *vérifient la relation :*

   $$9X^2 - 3Y^2 = 32$$

   b- *Construire* (C_5) *dans le repère* $(\Omega; \vec{u_0}, \vec{v_0})$

7. *On désigne par* A_1 *l'affinité orthogonale de* (P), *d'axe de repère* $(\Omega; \vec{v_0})$, *de rapport* $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ *et par* A_2 *l'affinité orthogonale de* (P), *d'axe de repère* $(\Omega; \vec{u_0})$, *de rapport* $\frac{\sqrt{6}}{8}$

   a- M *étant un point du plan* (P) *de coordonnées* (X, Y) *dans le repère* $(\Omega; \vec{u_0}, \vec{v_0})$, *exprimer en fonction de* X *et de* Y *les coordonnées dans le repère* $(\Omega; \vec{u_0}, \vec{v_0})$ *de l'image de* M *par l'application composée* $A_1 \circ A_2$

   b- *Démontrer que l'image de* (C_5) *par l'application* $A_1 \circ A_2$ *est une hyperbole équilatère que l'on précisera*

Exercice 18.

1. *Calculer les racines complexes* z_1 *et* z_2 *de l'équation*

   $$z^2 - \frac{1}{5}z + \frac{1}{10} = 0,$$

   z_1 *désignant la racine de partie réelle positive.*

2. *Soit* θ *le nombre réel de l'intervalle* $[0\ ,\ \frac{\pi}{2}[$ *tel que* $\tan(\theta) = 3$

   a- *Justifier l'existence et l'unicité du réel* θ

Je m'entraîne en Mathématiques

b- *Justifier que* z_1 *et* z_2 *sont respectivement égaux à*

$$\frac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{10\cos(\theta)} \qquad et \qquad \frac{\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{10\cos(\theta)}$$

3. *On pose pour tout entier naturel* n, $v_n = z_1^n + z_2^n$

- *Montrer que* v_n *est un nombre réel que l'on calculera en fonction de* θ *et* n

4. *Montrer que* $10\cos(\theta) = \sqrt{10}$

- *Majorer* $\mid v_n \mid$, *puis en déduire que la suite* (v_n) *est convergente puis déterminer sa limite.*

Problème 6. *Soit* k *un nombre réel.*

On considère la fonction f_k *définie sur* $[0\ ,\ 1]$ *par :*

$$f_k(x) = \begin{cases} xln^2(x) + kx & si\ x > 0 \\ \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

On note (C_k) *la courbe représentative de* f_k *dans le plan rapporté à un repère orthonormé* $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$. *(Unité* $10cm$*) et on considère le point* $L(1\ ,\ 1)$

Partie 1 (Étude de f_0 ***)***

1. *Déterminer* $f_0'(x)$ *pour tout* $x \in]0,1]$. *En déduire le sens de variation de* f_0 *sur* $]0,1]$

2. a- *Déterminer la limite de* $\frac{\ln(u)}{\sqrt{u}}$ *lorsque* u *tend vers* $+\infty$ *puis la limite de* $\frac{ln^2(u)}{u}$ *lorsque* u *tend vers* $+\infty$

   b- *En déduire la limite de* $xln^2(x)$ *lorsque* x *tend vers* 0 *par valeurs positives puis que* f_0 *est continue en* 0

   c- *Déterminer la limite de* $\frac{f_0(x)}{x}$ *lorsque* x *tend vers* 0 *par valeurs positives*

   - *En déduire l'équation de la tangente en* 0 *à* (C_0)

3. a- *Dresser le tableau de variation de* f_0

   b- *Tracer* (C_0)

Etude de f_k

1. a- *Justifier que* f_k *est dérivable sur* $]0,1]$ *et que :*

$$\forall \in]0,1],\ \ f'(x) = (1+\ln(x))^2 + k - 1$$

   b- *En déduire selon les valeurs de* k *les solutions de l'équation* $f'(x) = 0$

   c- *Soit* A_k *le point de* (C_k) *d'abscisse* 1. *Démontrer que la tangente* T_k *à* (C_k) *en* A_k *est la droite* OA_k.

2. a- *Établir que* f_k *est continue en* 0.

   b- *Déterminer la tangente à* (C_k) *en* 0

Tracer des courbes

1. a- *Étudier les variations de* f_1

   b- *Déterminer la position relative des courbes* (C_0) *et* (C_1)

   c- *Tracer la courbe* (C_1) *sur le même graphique que* (C_0) *en précisant le coefficient directeur de la tangente* T_1 *à* (C_1) *au point* A_1

2. a- *Prouver que :*

$$f'_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{f_0(x)+f_1(x)}{2} \ pour\ tout\ x \in [0,1]$$

   b- *En déduire une construction de* $(C_{\frac{1}{2}})$ *à partir de* (C_0) *et* (C_1). *Tracer* $(C_{\frac{1}{2}})$ *sur le même graphique que* (C_0) *et* (C_1)

Partie 2

Soit α *un nombre réel tel que :* $0 < \alpha < 1$

1. *On pose :*

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} xln^2(x)\,dx$$

   a- *En faisant deux intégrations successives par parties, démontrer que :*

$$I(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}ln^2(\alpha) + \frac{\alpha^2}{2}\ln(\alpha) + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}$$

   b- *Déterminer la limite* I *de* $I(\alpha)$ *lorsque* α *tend vers* 0 *par valeurs positives*

Je m'entraîne en Mathématiques

2. a- *Soit :*

$$S_k(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} f_k(x)\,dx$$

- *Exprimer $S_k(\alpha)$ en fonction de α.*
- *En déduire la limite S_k de $S_k(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 par valeurs positives.*

b- *En déduire que les courbes (C_0), $(C_{\frac{1}{2}})$ et (C_1) partagent le carré $OILJ$ en quatre parties de même aire avec $I(1,0)$ et $J(0,1)$*

Exercice 19. *Dans le plan muni d'un repère $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$,*

on considère les n points A_1, A_2, ..., A_n dont les affixes dans ce repère sont les racines dans C de l'équation $z^n = 1$ (1). On désigne par z_1 le nombre complexe :

$$z_1 = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$$

1. *Exprimer en fonction de z_1, les n racines de (1)*
   - *Déterminer l'isobarycentre des pints A_1, A_2, ..., A_n*
2. *Déterminer l'ensemble des points M tels que :*

$$\clubsuit \qquad \|\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{MA_k}\| = n$$

$$\clubsuit \qquad \sum_{k=1}^{n} MA_k^2 = 2n$$

Exercice 20. *Soit l'équation (1) d'inconnue x suivante :*

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$$

où u et v sont des entiers relatifs

1. *On suppose dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'équation (1)*

   a- *Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation $14u + 39v = 1129$*

   b- *Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les divers étapes du calcul, pour trouver les couples (x, y) d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$*

   - *Vérifier que le couple $(-25, 9)$ est solution de cette équation*

   c- *En déduire un couple (u_0, v_0) solution particulière de l'équation : $14u+39v = 1129$*

   - *Donner la solution générale de cette équation c'est à dire l'ensemble des couples (u, v) d'entiers relatifs qui la vérifient*

   d- *Déterminer, parmi les couples (u, v) précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible*

2. a- *Décomposer 78 et 14 en produit de facteurs premier*

   En déduire dans IN l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14

   - *Soit $\frac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1)*

   Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78

   c- *En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.*

Exercice 21. *On considère dans $\mathbb{R}^4$ le système suivant :*

$$(S_m) : \begin{cases} x + y + z + mt = -1 \\ x + y + mz + t = 1 \\ x + my + z + t = -1 \\ mx + y + z + t = 1 \end{cases}$$

Résoudre (S_m) suivant les valeurs du paramètre réel m, puis déduire les solutions de (S_3)

Exercice 22. *Dans le plan complexe (P) muni du repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$, on considère l'application*

$$f : \quad (P) \longrightarrow (P)$$

$$M(z) \mapsto M'(z') \quad \text{tel que } z' = \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z} + 1$$

L'unité de longueur est le cm.

Je m'entraîne en Mathématiques

1. a- *Déterminer l'expression analytique de f*

   b- *Démontrer que f est une affinité orthogonale dont on précisera l'axe et le rapport.*

2. *On note (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et (C') l'image de (C) par f*

   a- *Démontrer que (C') à pour équation $x^2+4y^2-2x-3=0$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (C')*

   b- *Préciser les points communs de (C) et (C'), puis construire (C) et (C') dans le même repère*

3. *Soit (Γ) le domaine du plan limité par (C), (C') et les droites $(D): x=-1$ et $(D'): x=\frac{1}{3}$*

   a- *Prouver, sans calculer, que l'aire de (Γ) est égal à :*

$$\int_{-1}^{\frac{1}{3}} (2\sqrt{1-x^2}-\sqrt{-x^2+2x+3})\,dx$$

   b- *Construire dans le même repère l'hyperbole (H) d'équation $\frac{(x-1)^2}{2}-y^2=1$*

4. *Prouver que les tangentes en un point $M \in (C') \cap (H)$ sont perpendiculaires.*

Exercice 23. *Dans l'espace orienté ξ, on considère un losange $ABCD$ de centre O et les points E et F tels que : $\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OF}$; $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OF}$*

1. *Démontrer que $(O;\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE})$ est u repère orthonormé direct de ξ*

   On pose $\varphi = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$ où $S_{(AC)}$ et $S_{(BD)}$ sont les demi tours d'axe respectifs (AC) et (BD)

2. a- *Caractériser φ*

   b- *Préciser l'image par φ du plan $(Q): x+y+z+1=0$ dans le repère $(O;\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE})$*

3. *On désigne par (P) le plan déterminé par les points A, B et C*

   a- *Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan (P) tels que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{OA}$ est une ellipse*

   b- *Préciser le centre et l'excentricité de (Γ)*

   c- *Construire (Γ)*

Problème 7. *On considère pour tout entier naturel n non nul, les fonctions f_n définies sur $[0,+\infty[$ par :*

$$f_n(x)=\begin{cases} x\exp(\frac{-1}{nx}) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (On prendra 4cm pour unité graphique)

Partie 1

1. ***Étude des variations de f_n pour n entier naturel non nul***

   a- *Prouver que f_n est continue sur $[0,+\infty[$*

   b- *Étudier la dérivabilité de f_n en 0*

   c- *Calculer $f_n'(x)$ pour $x>0$ et justifier que f_n est strictement croissante sur $[0,+\infty[$*

2. ***Étude au voisinage de $+\infty$***

   a- *Déterminer la limite de f_n en $+\infty$*

   b- *Donner le tableau de variation de la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par*

$$g(u)=e^{-u}-(1-u)$$

   - *En déduire que pour tout nombre réel $u\geq 0$, on a :*

$$0\leq 1-e^{-u}\leq u \qquad (1)$$

   c- *Soit $t\geq 0$*

   En intégrant sur $[0,t]$ l'encadrement (1), en déduire que pour tout nombre réel $t\geq 0$

$$0\leq e^{-t}-(1-t)\leq \frac{t^2}{2} \qquad (2)$$

   d- *Démontrer à l'aide du (2) que, pour tout nombre réel $x>0$:*

$$0\leq f_n(x)-(x-\frac{1}{n})\leq \frac{1}{2n^2x} \qquad (3)$$

   En déduire que la droite (D_n) d'équation $y=x-\frac{1}{n}$ est asymptote à la courbe (C_n) représentative de f_n

Je m'entraîne en Mathématiques

3. ***Tracé des courbes***

   a- *Donner le tableau de variation de* f_n

   b- *Tracer la courbe* (C_1) *et son asymptote en précisant la tangente en* 0

   c- *Construire* (C_2) *sur le même graphe que* (C_1)

Partie 2

1. *Démontrer que l'équation* $f_n(x) = 1$ *admet une solution unique notée* α_n *dans* $[0, +\infty[$

2. *Démontrer que* α_n *est solution de l'équation* $x\ln(x) = \frac{1}{n}$

3. *Soit* h *la fonction définie sur* $[1, +\infty[$ *par* $h(x) = x\ln(x)$

   a- *Étudier les variations de* h

   b- *Prouver que la suite* (α_n) *est décroissante*

4. a- *Justifier le fait que la suite* (α_n) *converge et que sa limite* α *est supérieure ou égale à* 1

   b- *Démontrer que* $h(\alpha) = 0$. *En déduire la valeur de* α

Problème 8. *Le plan est muni d'un repère orthonormé* $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Partie A

On considère dans l'ensemble C *des nombres complexes, le polynôme :*

$$P(z) = z^3 - [2 + (3 + \sqrt{2})i]z^2 + [-5 - 3\sqrt{2} + (2\sqrt{2} + 1)i]z + \sqrt{2} + 5i\sqrt{2}$$

1. a- *Démontrer que* $P(z)$ *peut s'écrire sous la forme :*

$$P(z) = (z + 1 - i)Q(z)$$

   où Q *est un polynôme de degré* 2 *que l'on précisera*

   b *Écrire sous forme algébrique, le nombre complexe* $d = [3 + (2 - \sqrt{2})i]^2$

   c- *Résoudre dans* C *l'équation* $P(z) = 0$

2. *On considère la transformation* f *du plan dans lui même qui, à tout point* M *d'affixe* z, *on associe le point* $M' = f(z)$ *d'affixe* z' *définie par :*

$$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{z} - 1 + (1 + \sqrt{2})i$$

On désigne par A, B *et* C *les points d'affixes respectives* $-1 + i$, $3 + 2i$ *et* $i\sqrt{2}$

   a- *Calculer les affixes respectives des points* A', C' *images respectives de* A *et* C *par* f

   b- *En déduire la nature et les éléments caractéristiques de* f

Partie B

On désigne par h *l'homothétie de centre* A *et de rapport* $\sqrt{2}$. *On pose* $g = f \circ h$

3. a- *Déterminer l'écriture complexe de* h

   b- *Démontrer que* g *à pour écriture complexe :*

$$z' = (1 + i)\overline{z} - 1 + 3i$$

4. a- *Soit* M *un point du plan d'affixe* $z = x + iy$, *avec* x *et* y *des entiers. On note* $N = g(M)$

   Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BN}$ *sont orthogonaux, si et seulement si :* $5x + 3y = 15$

   b- *Résoudre dans* Z^2 *l'équation :* $5x + 3y = 15$

   c- *En déduire les points du plan dont les coordonnées sont des entiers appartenant à* $[-5, 5]$ *et tels que* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BN}$ *soient orthogonaux*

Partie C

Soit φ *la transformation plane d'expression analytique :*

$$\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$$

5. *Démontrer que* φ *est une symétrie glissée*

6. *Démontrer que* $r = g \circ \varphi$ *à pour écriture complexe :* $z' = (1 - i)z$

7. *Soit* (Γ) *l'ensemble des points* M *du plan de coordonnées* (x, y) *vérifiant :*

$$5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y = 0$$

   a- *Déterminer une équation cartésienne de* $(\Gamma') = r(\Gamma)$

   b- *Démontrer que* (Γ') *est une ellipse dont on précisera le centre et les sommets*

   c- *En déduire que* (Γ) *est une ellipse dont on précisera le centre et les sommets*

Je m'entraîne en Mathématiques

Exercice 24.

1. a- *Calculer* $\int_0^x te^t\,dt$

   b- *Soit* a *une constante réelle et* u *la fonction définie de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *par*

   $$u(x) = xe^x + a$$

   Soit U *une primitive de* u *sur* $\mathbb{R}$ *qui s'annule en* 0

   i) *Exprimer* $U(x)$ *à l'aide d'une intégrale*

   ii) *En déduire* $U(x)$ *en fonction de* x

2. f *est une fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$ *telle que*

   $$\begin{cases} \forall x \in IR, \quad f'(x) = xe^x - 2\int_0^1 f(x)\,dx \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

   Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$

Exercice 25. *Soit la fonction numérique* f *de variable réelle* x *définie par :*

$$f(x) = \frac{3^{-x} - 1}{3^{-x} + 1}$$

et (C) *sa courbe représentative dans le repère orthonormé* $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$

1. *Étudier les variations de* f *et construire* (C)

2. *Soit* f_0 *la restriction de* f *à l'intervalle* $[0,1]$, (C') *sa courbe représentative dans le repère* $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$. D *est le domaine du plan limité par* (C') *et les droites d'équations* $x = 0,\ y = 1$ *et* $y = 0$

   Calculer le volume du solide de l'espace engendré par la rotation de D *autour de l'axe des abscisses*

   ⊗ *On remarquera que :* $(3^{-x} - 1)^2 = (3^{-x} + 1)^2 - 4.3^{-x}$

3. *Démontrer que* f *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur un intervalle* I *à préciser*

   Soit g *la bijection réciproque de* f. *Exprimer* $g(x)$ *pour tout* x *élément de* I

Exercice 26. *Dans l'espace* (ξ) *muni du repère orthonormé* $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$, *on considère le point* $A(2,1,0)$ *et le plan* (P) : $x - y + 2z + 3 = 0$

Soit les vecteurs $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ *et* $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$

1. *Démontrer que* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *est une base orthonormé de* (P)

2. *Déterminer le vecteur* $\vec{u}$ *de* (ξ) *tel que* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{u})$ *soit une base orthonormé direct de* (ξ)

3. *Soit* (Q) *le plan de* (ξ) *d'équation* $x - y + 2z - 1 = 0$ *et* (D) *la droite de* (ξ) *dirigée par le vecteur* $\vec{v}(-1,1,-2)$ *et passant par* A

   On désigne par $S_{(Q)}$ *la réflexion de* (ξ) *par rapport au plan* (Q) , $S_{(P)}$ *la réflexion du plan* (P) *et* $S_{(D)}$ *le demi-tour d'axe* (D)

   a- *Déterminer l'expression analytique de* $S_{(D)}$

   b- *Démontrer que* $S_{(Q)} \circ S_{(P)}$ *est une translation de vecteur* $\vec{w}$ *que l'on précisera*

4. *On considère les points* $B(-1,2,1)$, $C(1,3,2)$ *de l'espace* (ξ). *Pour tout nombre réel* t *strictement positif, on définie l'application* f_t *de* (ξ) *dans* (ξ) *qui à tout point* M, *associe le point* M' *tel que :*

   $$\overrightarrow{MM'} = \ln(t)\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB} - t\overrightarrow{MC}$$

   a- *Démontrer que* f_1 *est une translation*

   b- *On suppose que* $t \notin \{1, e\}$

   ♣ *Démontrer que* f_t *est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport*

Exercice 27.

1. *Résoudre dans* Z^2 *l'équation :* $715x - 440y = 12210$ *d'inconnue* (x,y)

2. *Dans une urne contenant* 6 *boules indiscernables au toucher et numérotées de* 1 *à* 6, *on procède à trois tirages successifs sans remises d'une boule*

   • *On désigne respectivement par* a, b *et* c *le premier, le deuxième et le troisième numéros obtenus. ; on forme, ainsi l'entier naturel* n *dont l'écriture dans le système décimal est* $\overline{1a2bc}$

   • *On considère l'équation* (E) : $715x - 440y = n$, *dont l'inconnue est le couple d'entiers relatifs* (x,y)

   a- *Trouver tous les triplets* (a,b,c) *pour lesquels* n *est un multiple de* 55

   b- *Déterminer la probabilité pour que* (E) *admet des solutions dans* Z^2

Je m'entraîne en Mathématiques

Problème 9. ***Partie A***

1. a- *Résoudre l'équation différentielle* $y'' - y = 0$
   b- *Déterminer la solution* f *de cette équation qui vérifie* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = \frac{1}{2}$
2. a- *Étudier les variations de la fonction* f *et tracer sa courbe représentative* (C) *dans un plan rapporté à un repère orthonormé* $(O; \vec{i}, \vec{j})$
   b- *Démontrer que l'équation* $f(x) = x$ *admet une solution unique* α *dans l'intervalle* $]0, +\infty[$ *et que* $2 \leq \alpha \leq 3$. *Donner un encadrement de* α *à* 10^{-1} *près.*
3. a- *Prouver que* f *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$
   b- *Tracer la courbe représentative de la fonction réciproque* g *de* f *dans le même repère que* (C)
   c- *Déterminer* $g(x)$ *pour tout* x *réel*

Partie B

On considère la fonction G *définie de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *par :*

$$G(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}\, dt$$

4. a- *Déterminer le domaine* D *de définition de la fonction* G
   b- *Démontrer que* G *est dérivable et calculer sa dérivée*
   c- *Déterminer le sens de variation de* G
   d- *Démontrer que* G *est impaire*
5. a- *Prouver que, pour tout nombre réel* $t \geq 0$ *on a :* $\frac{1}{1+2t} \leq \frac{1}{1+4t^2}$
   b- *déduire que pour tout* x *de l'intervalle* $[0, +\infty[$, *on a :*

$$\frac{1}{2}\ln(1+2x) \leq G(x) \quad \text{et que} \quad \lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$$

6. a- *Démontrer que* g *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$
   b- *Soit* F *la bijection réciproque de* G. *Démontrer que* F *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que pour tout nombre réel* x *on a:*

$$F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1+4[F(x)]^2}$$

   c- *Déduire que* F *est deux fois dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et que* $F'' - F = 0$. *Calculer* $F(0)$ *et* $F'(0)$
   d- *Prouver que* $F = f$ *et* $G = g$

Exercice 28. *Dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(O; \vec{i}, \vec{j})$, *on considère la parabole* (P) *d'équation* $y^2 = 8x + 1$

1. *Déterminer le sommet* S, *le foyer* F, *la directrice* D *et le paramètre* p *de* (P)
2. *On se propose de déterminer les points* $M(x, y) \in (P)$ *tels que* x *et* y *sont des entiers relatifs.*
   a- *Démontrer que* $x \geq 0$
   b- *i) Démontrer que le carré de tout entier impaire est congru à* 1 *modulo* 8
   ⊗ *On pourra remarquer que :* $\forall p \in Z, \quad p(p+1) \equiv 0[2]$
   ii) Résoudre dans $IN \times IN$, *l'équation* $y^2 = 8x + 1$
   c- *Déduire de ce qui précède tous les points* M *cherchés*
3. *Construire* (P) *en précisant tous les points* $M(x, y)$ *de* (P) *tels que* $(x, y) \in IN \times IN$ *et* $0 \leq x \leq 10$

Exercice 29. *Soit* $\theta \in [0, \pi]$

1. *On pose* $u = 1 + \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$
   - *Donner lorsque cela est possible le module et un argument de* u
     (Discuter suivant les valeurs de θ*)*
2. *Dans le plan complexe* P *muni du repère orthonormé direct* $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, *on considère l'application :*

$$f_\theta : \quad P \longrightarrow P$$
$$M(z) \rightarrowtail M'(z') \text{ tel que } z' = (1+\cos(2\theta)+i\sin(2\theta))\overline{z}+1-i\sqrt{3}$$

   a- *Démontrer qu'il existe deux valeurs* θ_1 *et* θ_2 $(\theta_1 < \theta_2)$ *de* θ, *pour lesquellees* f_θ *est une isométrie*
   b- *Caractériser* f_{θ_1} *et* f_{θ_2}

Exercice 30. *On considère le nombre complexe* t *tel que* $t = z^2 - (2+2i)z$ *avec* z *élément de* C

1. *On suppose que* $z = 2\sqrt{2}e^{i\alpha}$ *avec* $\alpha \in [0, \pi]$

Je m'entraîne en Mathématiques

Déterminer suivant les valeurs de α le module et un argument de t

2. *Déterminer l'ensemble (Γ) des nombres complexes z tels que t soit un nombre complexe imaginaire pur*

3. *Représenter (Γ) dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$*

Problème 10. ***Partie A***

1. *Soit la fonction*

$$u : \quad]1,+\infty[\longrightarrow IR$$
$$x \rightarrowtail x^2 - 2x - (x-1)\ln(x)$$

   a- *Étudier les variations de u', la dérivée de u. En déduire le signe de $u'(x)$*

   b- *Démontrer que l'équation $u'(x) = 0$ admet dans $]1,+\infty[$ une solution unique α*

   c- *Justifier que $\frac{5}{2} < \alpha < 3$*

   d- *Étudier le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x*

2. *Soit la fonction f de la variable réelle x définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \exp(\frac{x^2-2x}{x-1}) & si\ x \in IR - \{1\} \\ 0 & si\ x = 1 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$

   a- *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{x-1} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

On pourra utiliser la relation $x = e^{\ln(x)}$ où $x \in IR_+^*$

   b- *Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x_0 = 1$*

   c- *Achever l'étude des variations de f*

   d- *Justifier que le nombre réel α obtenu à la question **1.-b** est l'unique solution dans $\mathbb{R} - \{1\}$ de l'équation $f(x) = x$*

   e- *Construire (C)*

Partie B

3. *On pose $I = f(]1,+\infty[)$. Soit la fonction :*

$$v : \quad]1,+\infty[\longrightarrow I$$
$$x \mapsto f(x)$$

et (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$

   a- *Établir que v est une bijection. On note g la bijection réciproque de v*

   b- *Justifier que pour tout x de I, on a :*

$$g(x) = \frac{2 + \ln(x) + \sqrt{4 + [\ln(x)]^2}}{2}$$

Soit la fonction h de la variable réelle x définie par : $h(x) = g(-x)$. On note (C') sa courbe représentative dans le repère $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$

4. *Démontrer que (C') est l'image de (Γ) par la rotation r et caractériser r*

5. *Soit la fonction*

$$k : \quad]\frac{1}{3},+\infty[\longrightarrow IR$$
$$x \rightarrowtail \frac{1}{3} exp(\frac{9x^2 - 6x}{3x-1}) + \frac{2}{3}$$

et (C_k) sa courbe représentative dans le repère $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$

Soit $M(x,y)$ un point quelconque du plan (P) et $N(X,Y)$ le point de (P) tel que :

$$\begin{cases} X = 3x \\ Y = 3y - 2 \end{cases}$$

   a- *Établir que $(M \in (C_k)) \Leftrightarrow (N \in (\Gamma))$*

   b- *En déduire que (Γ) est l'image de (C_k) par une homothétie et caractériser cette homothétie*

Je m'entraîne en Mathématiques

c- *Démontrer que* (C_k) *est l'image de* (C') *par une similitude plane* (S) *et caractériser* (S)

Exercice 31. *Soit* $(O;\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC})$ *un repère orthonormé de l'espace. Soit* $M(x,y,z)$ *un point de l'espace*

On note H *le projeté orthogonal de* M *sur la plan* (ABC) *et* K *son projeté orthogonal sur la droite* (AB)

1. *Soit* G *l'isobarycentre des points* $A,\ B$ *et* C

   a- *Donner les coordonnées du point* G

   b- *Démontrer que la droite* (OG) *est perpendiculaire au plan* (ABC)

   c- *Donner une équation cartésienne du plan* (ABC)

2. a- *Démontrer que* $|\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OG}\ | = \frac{1}{\sqrt{3}}MH$

   b- *Calculer la distance de* M *au plan* (ABC) *en fonction de* $x,\ y$ *et* z

3. a- *On pose* $\overrightarrow{AK} = t\overrightarrow{AB}$ *avec* $t \in IR$

   – *Déterminer le réel* t *en fonction de* $x,\ y$ *et* z

   b- *En déduire que* $MK = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2z^2 + (1-x-y)^2}$

4. *On se place dans le plan d'équation* $z = 0$ *et on considère l'ensemble* (Γ) *des points du plan* (OAB) *qui sont équidistants du point* O *et du plan* ABC

   a- *Démontrer que* (Γ) *ne contient aucun point de la droite* (AB)

   b- *Soit* $M(x,y,0)$ *un point du plan* (OAB) *n'appartenant pas à la droite* (AB).

   Démontrer que M *appartient à* (Γ) *si et seulement si* $\frac{MO}{MK} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Exercice 32. *Dans le plan orienté* (P), *on considère un carré* $ABCD$ *de centre* O *tel que*

$$mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in Z$$

On pose $AB = a$ *avec* $a \in IR_+^*$. *Soient* $I,\ J,\ K$ *et* L *les milieux respectifs des côtés* $[AB],\ [BC],\ [CD]$ *et* $[AD]$

Soit (Γ) *l'ensemble des points* M *du plan* (P) *tel que :*

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = a^2$$

1. *Soit* M *un point du plan* (P)

   a- *Démontrer que*

   $$(M \in (\Gamma)) \Leftrightarrow (MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ML^2 = 2a^2)$$

   b- *Justifier que* O *est l'isobarycentre des points* $I,\ J,\ K$ *et* L

   c- *Démontrer que :*

   $$(M \in (\Gamma)) \Leftrightarrow (MO^2 = \frac{a^2}{4})$$

   d- *Caractériser* (Γ)

2. *Soit* r *la rotation de centre* A *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$, s *la réflexion d'axe* (AB).

   On pose $f = r \circ s$ *et* $(\Gamma') = f(\Gamma)$

   a- *Déterminer la droite* (Δ) *telle que* $r = \varphi \circ s$ *où* φ *est la réflexion d'axe* (D)

   b- *Caractériser l'application* f

   c- *Déterminer et construire l'ensemble* (Γ'). *On prendra* $a = 2cm$

Exercice 33. *Soit* α *un nombre complexe non nul.*

a- *Factoriser* $\alpha^2 - 2i\alpha - 1$. *Résoudre dans* C *l'équation :*

$$(E): \quad z^2 - \alpha(\alpha+i)z + i\alpha^3 = 0$$

b- *Soit* ρ *le module de* α *et* θ *un de ses arguments. Calculer le module et un argument de chacune des solutions de l'équation* (E) *en fonction de* ρ *et* θ

1. *Soit* S_α *la transformation du plan orienté qui, à tout point* M *d'affixe* z, *associe le point* M' *d'affixe* z' *définie par :* $z' = \alpha iz + \alpha^2$

   Déterminer α *pour que* S_α *soit la rotation d'angle* $\frac{5\pi}{6}$. *Quel est le centre de cette rotation ?*

Problème 11. ***Partie A***

Soit f *le fonction définie par :*

$$f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$$

Je m'entraîne en Mathématiques

1. *Déterminer le domaine de définition de f*
2. *Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$*
   - a- *Dresser le tableau de variation de g*
   - b- *En déduire que la courbe de g coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α et que $\frac{\ln(2)}{2} < \alpha < 1$*
   - c- *Étudier le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$*
3. *Démontrer que pour $x > 0$, on a :*

$$ln[f(x)] = \frac{1}{x}[1 + x\ln(x)] + \frac{1}{2}\ln(1 - e^{-\frac{2}{x}})$$

En déduire que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

4. - a- *Démontrer que $f(\frac{1}{\alpha}) = \sqrt{\frac{1}{\alpha - \alpha^2}}$*
   - b- *Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(\frac{1}{x})$*
   - c- *Dresser le tableau de variation de f*
   - d- *Étudier la position relative de (C_f)[1] et $(\Delta) : y = x$*
   - e- *Tracer (C_f) et (Δ) dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$*

Partie B

1. *Démontrer que la restriction h de f à $]\frac{1}{\alpha},+\infty[$ est une bijection de $]\frac{1}{\alpha},+\infty[$ sur un intervalle J à préciser*
2. - a- *Étudier la dérivabilité de h^{-1}*
   - b- *Tracer la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère*
3. *Soit (u_n) la suite définie sur IN par :*

$$u_n = \begin{cases} 4 & si\ n = 0 \\ f(u_n) & sinon \end{cases}$$

   - a- *Démontrer que pour tout entier naturel n, $\frac{2}{\ln(2)} \leq u_n \leq 4$*
   - b- *Étudier la monotonie de la suite (u_n). En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite*

Partie C

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit ψ l'application de (P) dans (P) qui à tout point M d'affixe $z \in C$ tel que $|z| \neq 1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{\bar{z}}{\ln(|z|)}$

1. *Déterminer les coordonnées x' et y' du point M' en fonction des coordonnées x et y du point M*
2. *Soit (E) l'ensemble des points $M' = \psi(M)$ lorsque M décrit la droite d'équation $x = 1$ privé du point d'affixe 1*

   Démontrer (E) est la réunion de la courbe (C_f) et d'une courbe (Γ) obtenue à partir d'une transformation simple que l'on précisera

Problème 12. *Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x^2) & si\ x \in]-\infty, 0[\\ \int_0^x \frac{e^t}{1+t}\,dt & si\ x \in [0,+\infty[\end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan ***Partie A***

1. - a- *Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$*
   - b- *Étudier la continuité de f au point $x_0 = 0$*
2. *Soit x un nombre réel strictement positif*
   - a- *Démontrer que pour tout t élément de $[0,x]$, $\frac{e^t}{x+1} \leq \frac{e^t}{t+1} \leq e^t$*
   - b- *En déduire que $\frac{e^x-1}{x+1} \leq f(x) \leq e^x - 1$*
   - c- *Étudier la dérivabilité de f au point $x_0 = 0$*
   - d- *Donner une interpretation géométrique des résultats obtenus*
3. - a- *Déterminer la dérivée f' de f*
   - b- *Calculer :*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

[1] Courbe représentative de f

Je m'entraîne en Mathématiques

c- *Dresser le tableau de variation de* f

d- *Étudier les branches infinies de* (C)

4. *Construire* (C)

Partie B *Dans cette partie, on se propose de déterminer l'ensemble* (Γ) *des points* M *dont les coordonnées*(x,y) *dans le repère* $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ *vérifient les relations :*

$$\begin{cases} x &= \int_{\frac{3}{2}}^{y} \frac{e^{2t-3}}{t-1}\,dt \\ y &\geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Soit l'application

$$\begin{aligned} g: \quad IR_+ &\longrightarrow IR_+ \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

On définie par (C') *sa courbe représentative dans le repère* $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$

5. *Démontrer que* g *est une bijection*

6. *Soit* $M(x,y)$ *un point du plan*

a- *Établir à l'aide du changement de variable* $u = 2t-3$ *que :*

$$(M \in (\Gamma)) \Longleftrightarrow \begin{cases} y &\geq \frac{3}{2} \\ x &= g(2y-3) \end{cases}$$

b- *En déduire que* $(\Gamma) = (t_{\vec{u}} \circ \theta \circ S_\Delta)(C')$ *où* $t_{\vec{u}}$ *est une translation,* θ *une affinité,* S_Δ *la réflexion d'axe* Δ *d'équation* $y = x$ *et caractériser chacune des transformations* $t_{\vec{u}}$ *et* θ

c- *En déduire une construction point par point de* (Γ)

Exercice 34. *Dans l'espace* ξ *orienté,* $ABCD$ *est un tétraèdre tel que* ABC, ABD, *et* ADC *sont des triangles rectangle isocèles en* A *et* $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

Soit l'application t *de* ξ *dans* ξ *qui à tout point* M *associe le point* M' *tel que :*

$$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AM}$$

1. *Démontrer que :*

a- t *est une translation et la caractériser*

b- *L'ensemble* P *des points* M *de* ξ *tels que*

$$\overrightarrow{AM}.[(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) \wedge (2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})] = 0$$

est plan (ABC)

c- $(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD})$ *est un repère orthonormé de* ξ

2. *Déterminer l'image du plan* (P) *par* t

3. *On désigne par* $S_{(AB)}$, $S_{(AC)}$, $S_{(AD)}$ *les demi-tours d'axe respectifs* (AB), (AC), (AD) *et par* S_p *et* $S_{(ABD)}$ *les réflexions des plans* P *et* ABD

♠ *Déterminer les applications* $S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$; $S_p \circ S_{(ABD)}$ *et* $S_{(AB)} \circ S_p$

Exercice 35. *Le plan* (P) *étant muni d'un repère orthonormé direct* $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$, *avec* $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$, *on considère l'ensemble* (E) *des points* M *de* (P) *dont l'affixe* z *de* (P) *vérifie la relation :*

$$10z\overline{z} + 3(z^2 + \overline{z}^2) = 4$$

1. *Démontrer que* (E) *est une ellipse dont on précisera les foyers* F *et* F', *les directrices associées et l'excentricité* e

2. *Soit* f *la composée de l'homothétie de centre* O *et de rapport* 2 *et de la rotation de centre* O *et d'angle* $\frac{\pi}{4}$

a- *Déterminer une équation dans le repère* $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$ *de la courbe* (E'), *image de* (E) *par* f

3. *Construire les courbes* (E) *et* (E') *sur un même schéma*

4. a- *En utilisant le changement de variable* $2x = \cos(u)$, *avec* $u \in [0, \frac{\pi}{2}[$, *calculer l'intégrale :*

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-4x^2}\,dx$$

b- *En déduire l'expression en* cm^2, *de l'aire de la portion* Δ *de* (P) *délimitée par* (E) *puis celle de la portion* Δ' *de* (P) *délimitée par* (E')

Je m'entraîne en Mathématiques

Problème 13. *Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :*

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2} & si\ x\neq 0\\ \\ \frac{1}{2} & si\ x\ =\ 0\end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$

Partie A

1. *En utilisant le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x\rightarrowtail \ln(1+x)$, démontrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=\frac{1}{3}$.*
   Préciser l'équation cartésienne de la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe (C)

2. *On désigne par h la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :*

$$h(x)=-\frac{x^2+2x}{1+x}+2\ln(1+x)$$

   a- *Étudier le sens de variation de h. (On ne demande pas d'étude aux bornes)*

   b- *Préciser $h(0)$. En déduire le signe de $h(x)$ sur $]-1,+\infty[$*

3. *Calculer $f'(x)$ pour $x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[$, puis l'exprimer à l'aide de $h(x)$*

4. *Étudier la limite de f en -1 et en $+\infty$*

5. *Construire avec soins la courbe (C) en précisant ses asymptotes (On prendra 2cm pour unité graphique)*

Partie B

1. a- *Démontrer que pour tout réel $t\geq 0$, on a: $-t^2\leq h'(t)\leq 0$*

   b- *Pour tout réel $x\geq 0$, déduire par intégration un encadrement de $h(x)$ et démontrer que $|f'(x)|\leq\frac{1}{3}$*

2. *Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi(x)=f(x)-x$*

   ✓ *De l'étude des variations de φ, démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution réelle strictement positive notée a*

   ✓ *Vérifier que l'on a : $a<0$*

Partie C

1. *On pose $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel*

   • *Démontrer en utilisant le sens de variation de f que cette suite est bien définie et que, pour tout entier naturel n, on a : $0<u_n<1$*

2. a- *Démontrer que pour tout entier naturel n,*

$$|u_{n+1}-a|\leq\frac{1}{3}|u_n-a|$$

   puis démontrer que

$$|u_n-a|\leq\frac{1}{3^n}$$

   b- *Prouver que la suite (u_n) converge et préciser sa limite*

   c- *Trouver, en justifiant, une valeur de n pour laquelle u_n est une valeur approchée de a à 10^{-3} près*

   ✓ *Préciser cette valeur approchée*

Problème 14. *Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$. L'unité de longueur est 2cm*

Partie A

On considère l'ensemble (E) de points M d'affixe z tel que :

$$|z-1-i|=\frac{1}{4}|z+i\overline{z}-8(1+i)|$$

Soit S_α l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z'=\alpha i\overline{z}+8(1+i)\qquad \alpha\in IR^*$$

1. *Déterminer suivant les valeurs de α la nature et les éléments caractéristiques de S_α*

2. *Ici, on suppose $\alpha=-1$*

   a- *Démontrer que (E) est une ellipse de foyer F d'affixe $1+i$ et de directrice la droite d'équation cartésienne $x+y-8=0$, d'excentricité $\frac{1}{2}$*

Je m'entraîne en Mathématiques

✓ *Préciser l'axe focal*

b- *Vérifier que les points A et A' d'affixes respectives $2+2i$ et $-2-2i$ sont deux sommets de (E)*

c- *Construire dans le repère $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$, la droite (D), l'axe focal, les points A, A' et F*

d- *Déterminer géométriquement les deux autres sommets de l'ellipse*

e- *Donner l'allure de (E)*

Partie B

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' sa fonction dérivée. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

★ *Pour tout nombre réel x,*

$$[\frac{f'(x)}{\ln(2)}]^2 - [f(x)]^2 = 1$$

★ $f'(0) = \ln(2)$

★ *La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$*

3. a- *Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) \neq 0$*

   b- *Calculer $f(0)$*

4. *En dérivant chaque membre de l'équation de la proposition (1), démontrer que pour tout nombre réel x, $f''(x) = [\ln(2)]^2 f(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de f*

5. *On pose $u = f' + \ln(2).f$ et $v = f' - \ln(2).f$*

   a- *Calculer $u(0)$ et $v(0)$*

   b- *Démontrer que $u' = \ln(2).u$ et $v' = -\ln(2).v$*

   c- *En déduire les fonctions u et v*

   d- *En déduire que*

$$f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$$

6. a- *Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$*

   b- *Dresser le tableau de variation de f*

   c- *Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C), courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0*

   d- *Construire (C) et (T) sur une autre figure*

7. *Prouver que f est une bijection*

8. *Construire l'image (C') de (C) par S_1*

9. *On désigne par (C'') la courbe représentative de f^{-1} et (Σ) le domaine fermé du plan défini par (C) et (C''), les droites d'équations $x=1$ et $y=1$*

- *Calculer l'aire (Σ') de (Σ) par S_2*

Problème 15. ***Partie A***

L'espace ξ est muni d'un repère orthonormé $(\Omega;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$. On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives $x-y+z-3=0$ et $2x-y-3z+4=0$

1. *Déterminer l'expression analytique du demi-tour d'axe $(P)\cap(Q)$*

2. *Soit le vecteur $\vec{u} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$*

   Déterminer une représentation paramétrique du plan (P') tel que $t_{\vec{u}} = f \circ S_{(P')}$ où f et $S_{(P')}$ désignent respectivement les réflexion des plans (P) et (P') et $t_{\vec{u}}$ la translation du vecteur $\vec{u}$

3. *On considère le point $O(0,4,0)$ et les vecteurs*

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j}) \qquad et \qquad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{70}}(6\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k})$$

   a- *Démontrer que $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ est un repère orthonormé de (Q)*

   b- *On désigne par h la restriction de f au plan (Q)*

   Déterminer l'expression analytique de h relativement au repère $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$

Partie B

On suppose que le plan complexe (Q) est muni du repère orthonormé $\Re = (O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$. A tout point $M(x,y)$ du plan, on associe, lorsque cela est possible, le nombre complexe

$$Z_{m,a} = \frac{1}{\ln(2)}\ln(2^x + a^2 + 1) + i[2x(-m + \ln(ax)) - y]$$

où m et a sont des paramètres réels avec a différent de zéro

Je m'entraîne en Mathématiques

4. *Déterminer l'ensemble des points M tels que $Z_{m,a}$ soit un réel strictement positif*

✓ *On définie ainsi une famille de courbes $(C_{m,a})$ d'équation : $y = f_{m,a}(x)$*

5. a- *Déterminer le domaine de définition $D_{m,a}$ de $f_{m,a}$*

   b- *Étudier les variations de $f_{m,a}$*

6. *On considère maintenant la fonction g définie par :*

$$g(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - 2x - 2x^2} & si\ x \leq 0 \\ \\ f_{1,1}(x) & si\ x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (Γ) la courbe de g dans le repère $\Re$

   a- *Étudier la continuité et la dérivabilité de g en $x = 0$*

      ✓ *Interpreter graphiquement le résultat de la dérivabilité*

   b- *On désigne par (Γ_1) la courbe dans $\Re$ de la restriction de g à l'intervalle $]-\infty, 0[$*

      ♠ *Démontrer que (Γ_1) est la portion d'une ellipse (E) dont on précisera : le centre, les sommets, les foyers et les directrices*

   c- *Construire, avec soins, la courbe (Γ)*

   d- *Discuter suivant les valeurs du paramètre réel t, le nombre de solutions de l'équation : $x + t - g(x) = 0$*

   e- *Calculer l'aire A du domaine du plan délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives, $x = 1$ et $x = e$*

Partie C

On désigne par F la transformation du plan d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

7. a- *Démontrer que F est une affinité dont on précisera le rapport, la directrice et l'axe*

   b- *Déterminer une équation cartésienne de $F(\Gamma_1)$*

8. *Pour tout entier nature n, on pose : $M_{n+1} = F(M_n)$*

   a- *Déterminer en fonction de x_0, y_0 et n les coordonnées (x_n, y_n) de M_n*

   b- *Déterminer l'ensemble des points M_n pour lesquels x_n et y_n ont une limite nulle, lorsque n tend vers $+\infty$*

Exercice 36. *Dans l'espace ξ, on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $OA = 1$*

1. *Démontrer que O est le barycentre des points $(A, 1)$, $(B, -2)$, $(C, 1)$ et $(D, -2)$*

2. *Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de ξ tels que $MA^2 - 2MB^2 + MC^2 - 2MD^2 = -4$*

3. *On désigne par S le point de ξ tel que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OS}$, par d_1 et d_2 les demi-tours d'axes respectifs (OA) et (OB)*

   a- *Préciser la nature de $d_1 \circ d_2$*

   b- *Déterminer l'image de (Γ) par $d_1 \circ d_2$*

   c- *Justifier que $(A; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OA})$ est un repère orthonormé direct de ξ*

4. *Soit l'application t de ξ dans ξ qui à tout point M associe le point M' tel que*

$$\overrightarrow{BM'} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \wedge \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM}$$

   a- *Démontrer que t est une translation dont le vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{OS}$*

   b- *Déterminer dans le repère $(A; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OA})$ une équation cartésienne de l'image par t du plan (OAB)*

Exercice 37.

1. *x et y sont des entiers naturels tels que : $0 \leq x \leq 6$ et $0 \leq y \leq 6$*
   Déterminer

   a- *L'ensemble (E_1) des couples (x, y) tels que $x - y + 1 \equiv 0[4]$*

   b- *L'ensemble (E_2) des couples (x, y) tels que $x + y - 1 \equiv 0[3]$*

2. *On lance deux fois un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par a le nombre apparu au premier lancer et par b le nombre apparu au second lancer*

   A chaque couple (a, b) ainsi obtenu, on associe l'entier naturel $n = \overline{ab236}^7$

   Déterminer la probabilité de chacun des évènements ci-après :

Je m'entraîne en Mathématiques

A : << *L'entier naturel n est divisible par* 3 >>

B : << *L'entier naturel n est divisible par* 4 >>

C : << *L'entier naturel n est divisible par* 3 *ou par* 4 >>

D : << *L'entier naturel n est divisible par* 12 >>

Exercice 38. *On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ et on désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$*

1. *Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x différent de 1, on a :*

$$f(x) = |x-2|^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}ln|x-2|}$$

2. a- *Étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 2*
   ✓ *Donner une interpretation géométrique des résultats obtenus*
   b- *Déterminer$f'(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R} - \{2\}$*
   c- *Étudier le sens de variation de f*
   d- *Dresser le tableau de variable de f*

3. a- *Étudier les branches infinies de la courbe (C)*
   b- *Construire (C)*

4. *Soit $I =]-\infty, 2]$ et $J = f(I)$*
   a- *Démontrer que l'application*

$$g : \quad I \longrightarrow J \qquad x \longmapsto f(x)$$

   est une bijection
   b- *Soit g^{-1} la bijection réciproque de g*
   • *Calculer $g^{-1}(y)$ pour tout y élément de J*

Problème 16. *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{|x^2+2x|} & si\ x \leq 0 \\ x\ln(\frac{x+2}{x}) & si\ x > 0 \end{cases}$$

Et on désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Partie A

1. *Soit D l'ensemble de définition de f*
   a- *Démontrer que $D = IR$*
   b- *Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$*

2. *Soit (C_1) la restriction de la courbe (C) à l'intervalle $]-\infty, 0]$*
   a- *Démontrer que $(C_1) = E_1 \cup H_1$ où E_1 est une portion d'une ellipse E et H_1 une portion d'une hyperbole H que l'on précisera*
   b- *Préciser l'excentricité, les sommets et les foyers de E.*
   ✓ *En déduire la définition bifocale de E*
   c- *Préciser les sommets et les asymptotes de H*
   d- *Construire (C_1)*
   e- *Utiliser la courbe (C_1) pour donner le sens de variation de f sur $]-\infty, 0]$*

3. *Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :*

$$g(x) = \ln(x+2) - \ln(x) - \frac{2}{x+2}$$

   a- *Étudier les variations de g*
   b- *En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$*

4. a- *Étudier la dérivabilité de f à droite en 0*
   b- *Étudier*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

   On pourra poser $t = \frac{2}{x}$

Je m'entraîne en Mathématiques

c- *Étudier le sens de variation de f sur $]0,+\infty[$ (On pourra utiliser la question **3.**)*

5. *Utiliser les résultats précédents pour dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$*

6. *Terminer la construction de (C) en complétant (C_1)*

Partie B

1. *On désigne par (Γ) l'ensemble des fonctions ψ, définies et dérivables sur $]0,+\infty[$ et possédant la propriété P suivante :*

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad \psi(x) - x\psi'(x) = \frac{2x}{x-2}$$

ψ étant une fonction définie et dérivable sur $]0,+\infty[$

On pose pour tout $x \in]0,+\infty[$, $k(x) = \frac{\psi(x)}{x}$

a- *Démontrer que ψ possède la propriété P si et seulement si, $k'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$*

b- *En déduire l'ensemble (Γ)*

c- *Vérifier que la restriction f_2 de f à $]0,+\infty[$ appartient à (Γ)*

2. *Soit F la primitive de f_2 qui s'annule en 1*

a- *Vérifier que pour tout réel t différent de -2, on a : $\frac{t}{t+2} = 1 - \frac{2}{t+2}$*

b- *A l'aide d'une intégration par parties, calculer $F(x)$ pour tout $x > 0$*

c- *Déterminer l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations $y = 2$, $x = 1$ et $x = 2$*

Exercice 39.

1. *Soit l'équation*

$$37x - 23y = 12 \qquad (1)$$

où x et y sont des entiers relatifs

a- *Résoudre dans Z^2 l'équation (1)*

2. *On pose $u = 23k + 60$; $v = 37k + 96$ avec k élément de Z*

- *Déterminer suivant les valeurs de k, $PGCD(u,v)$*

Exercice 40. *Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A tout point M d'affixe z, on associe le point P d'affixe $z-1$ et le point Q d'affixe z^2*

1. *Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que les points M, P et Q soient alignés*

2. *Déterminer l'ensemble (F) des points M tels que le vecteur $\overrightarrow{PM}$ soit orthogonal au vecteur $\overrightarrow{PQ}$*

3. *Représenter les ensembles (E) et (F) sur une même figure. Placer sur cette figure les points M, P et Q lorque $z = -i$ puis lorsque $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$*

Problème 17. *Le plan affine euclidien orienté P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$*

Partie A

1. *Soit (D) la droite d'équation $y = -2x + 1$*

a- *Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale s d'axe (D)*

b- *On appelle f_α la similitude plane direct de centre $I(-1,3)$ de rapport 2 et d'angle α avec $\alpha \in [-\pi, \pi[$*

- *Déterminer l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles (D) est orthogonale à son image par f_α*

c- *Déterminer l'expression analytique de f_α $(\alpha = \frac{\pi}{3})$*

2. *Soit g_1 l'application de P dans P qui, à tout point d'affixe z, on associe le point d'affuxe z' telle que :*

$$z' = (-3 - 4i)\overline{z} + 8 - 10i$$

a- *Préciser la nature et les éléments caractéristiques de g_1*

b- *Déterminer l'image par g_1 de la droite (D)*

3. *Soit g_2 l'application de P dans P ayant pour expression analytique :*

$$\begin{cases} x' &= -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{19}{5} \\ y' &= -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{18}{5} \end{cases}$$

a- *Préciser la nature et éléments caractéristiques de g_2*

Je m'entraîne en Mathématiques

b- *Déterminer les droites parallèles à leurs images par* g_2

Partie B

Soit (C) *le cercle de centre* $\Omega(0,1)$ *et de rayon* 2, g_3 *l'affinité orthogonale de rapport* $\frac{1}{2}$ *et d'axe la droite* (Δ) *d'équation* $y=1$

4. *Déterminer une équation cartésienne de l'image de* (C) *par* g_3
5. *Soit* r *la rotation de centre* Ω *et d'angle* $-\frac{\pi}{2}$, t *la translation de vecteur* $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{e}_1$

   On pose $g=t\circ r$

♠ *Démontrer que l'image de* (C_1) *par* g *est une conique dont on précisera le centre et les foyers*

▲ (C_1) *est l'image de* (C) *par l'affinité* g_3

Problème 18. *Le plan* (P) *est muni du repère orthonormé* $(O;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$. *Soit* a *un paramètre réel et l'application* f_a *du plan* (P) *dans lui même qui à tout point* M *de coordonnées* (x,y) *associe le point* M' *de coordonnées* (x',y') *telles que :*

$$\begin{cases} x' &= (\frac{a+1}{2})x+(\frac{a-1}{2})y+(\frac{a-1}{2}) \\ y' &= (\frac{a-1}{2})x+(\frac{a+1}{2})y+(\frac{a-1}{2}) \end{cases}$$

Partie A

1. *Justifier que* f_a *est une application affine*
2. *Soit* $M'(x',y')$ *un point du plan* (P)

   a- *Déterminer suivant les valeurs de* a, *l'ensemble des points* $M(x,y)$ *tels que* $f_a(M)=M'$

   b- *En déduire l'ensemble des valeurs de* a *pour lesquelles* f_a *est une transformation du plan*
3. a- *Démontrer que si* $a\neq 1$, *alors l'ensemble des points invariants par* f_a *est la droite* (D) *d'équation* $x+y+1=0$

   b- *Préciser la nature de* f_1
4. *On suppose que* $a\in IR-\{0,1\}$

   a- *Démontrer que pour tout point* M *de* (P) *n'appartenant pas à* (D), *d'image* M' *par* f_a, *vecteur* $\overrightarrow{MM'}$ *à une direction fixe*

   b- *Soit* H *le projeté orthogonal de* M *sur la droite* (D)

   ✓ *Exprimer* $\overrightarrow{MM'}$ *en fonction de* $\overrightarrow{HM}$

   c- *En déduire que* f_a *est une affinité orthogonale d'axe* (D) *et dont on précisera le rapport*

Partie B

Dans cette partie, on suppose $a\in IR_+^*-\{1\}$

Soit (C) *le cercle de centre* $\Omega(-2,1)$ *et passant par le point* $A(0,3)$. *On pose :*

$$\overrightarrow{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}) \quad ; \quad \overrightarrow{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$$

5. a- *Vérifier que* $(\Omega;\ \overrightarrow{u})$ *est un repère de* (D)

   b- *Démontrer que* $(\Omega;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$ *est un repère orthonormé de* (P)
6. *On désigne par* (X,Y) *les coordonnées d'un point quelconque* M *dans le repère* $(\Omega;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$ *et par* (X',Y') *celles de l'image* M' *de* M *par* f_a *dans le même repère*

   a- *Démontrer que dans le repère* $(\Omega;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$, f_a *à pour expression analytique :*

$$\begin{cases} X' &= X \\ Y' &= aY \end{cases}$$

   b- *Déterminer dans le repère* $(\Omega;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$,

   i- *Une équation cartésienne du cercle* (C)

   ii- *Une équation cartésienne de l'image* (Γ_a) *de* (C) *par* f_a

Je m'entraîne en Mathématiques

c- *En déduire la nature de* (Γ_a)

7. *Soit* (H) *l'hyperbole d'excentricité* $\sqrt{2}$*, de centre* Ω *telle que dans le repère* $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$*, l'une de ses asymptotes à pour équation* $x=-2$ *et l'un de ses sommets est le point* $B(-\frac{1}{2},\frac{5}{2})$

a- *Construire* (H) *et* $(\Gamma_{\frac{1}{2}})$ *dans le repère* $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$

b- *Résoudre dans* $\mathbb{R}^2$ *le système :*

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2 &= 8 \\ \alpha^2-\beta^2 &= \frac{9}{2} \end{cases}$$

d'inconnue (α,β)

c- *Déterminer et construire le point* K *de* (Γ) *et un point* L *de* $(\Gamma_{\frac{1}{2}})$ *tels que* $f_{\frac{1}{2}}(K)=L$

Exercice 41. *On désigne par* x *et* y *des entiers naturels non nuls avec* $x<y$*.* S *l'ensemble des couples* (x,y) *tels que* $PGCD(x,y)=y-x$

1. *Calculer* $PGCD(363,484)$*. Le couple* $(363,484)$ *appartient à* S *?*

2. *Soit* n *un entier naturel non nul. Le couple* $(n,n+1)$ *appartient-il à* S *?*

- *Justifier votre réponse !!*

3. a- *Démontrer que* (x,y) *appartient à* S *si et seulement s'il existe un entier naturel non nul* k *tel que :*

$$x=k(y-x) \qquad et \qquad y=(k+1)(y-x)$$

b- *En déduire que* $PPCM(x,y)=k(k+1)(y-x)$

4. a- *Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de* 228

b- *En déduire l'ensemble des couples* (x,y) *de* S *tels que* $PPCM(x;y)=228$

Problème 19. *On désigne par* f *la fonction numérique de la variable réelle définie par :*

$$f(x)=\begin{cases} \ln(x-\sqrt{x^2-1}) & si\ x\geq 1 \\ \frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}} & si\ x<1 \end{cases}$$

On désigne par (C) *la courbe représentative de* f *dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$ *(unité graphique* $2cm$*)*

1. *Soit* D *l'ensemble de définition de* f

a- *Démontrer que* $D=IR$

b- *Déterminer*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

et Interpreter graphiquement le résultat obtenu

c- *Déterminer*

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-1})$$

. En déduire

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

d- *Démontrer que pour tout réel* $x>1$*, on a:*

$$\frac{f(x)}{x}=-\frac{\ln(x)}{x}-\frac{\ln(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x})}{x}$$

En déduire

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$

2. *On pose :* $X=\frac{2}{x-1}$ *avec* $x<1$

a- *Prouver que :*

$$\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{e}{2}X^2e^X \qquad et\ que \qquad \frac{2}{(x-1)^3}e^{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{e}{4}X^3e^X$$

b- *En utilisant la question* ***a-*** *déterminer*

$$\lim_{x\to1^-} f(x)$$

puis démontrer que f *est continue en* 0

c- *Démontrer que* f *est dérivable à gauche en* 1 *et préciser* $f'_g(1)$

3. a- *Démontrer que pour tout réel* $x>1$*, on a :*

$$\frac{\ln(x-\sqrt{x^2-1})}{x-1}=\frac{\ln(x-\sqrt{x^2-1})}{(x-\sqrt{x^2-1})-1}\times[1-\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}]$$

b- *Étudier la dérivabilité de* f *à droite en* 1 *et donner une interpretation graphique du résultat obtenu*

Je m'entraîne en Mathématiques

4. a- *Démontrer que pour tout $x > 1$, on a :*

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

et que pour tout $x < 1$, on a :

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

b- *Étudier les variations de f*

c- *Construire la courbe (C). On mettra en évidence les tangentes à (C) au point d'abscisse 1*

5. a- *On considère la fonction*

$$F : \quad [0,1] \longrightarrow IR$$
$$x \rightarrowtail \int_0^x f(t)\,dt$$

et on pose

$$I = \int_0^1 f(t)\,dt$$

Ainsi $F(1) = I$

i- *Justifier que F est définie et continue sur $[0,1]$*

ii- *Soit x un réel tel que $0 < x < 1$*

✓ *Calculer $F(x)$ puis déterminer*

$$\lim_{x \to 1^-} F(x)$$

✓ *En déduire la valeur de I*

b- *Déterminer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine du plan (P) délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$*

6. *On pose $J = [1, +\infty[$ et $K = f(J)$*
Soit l'application

$$g : \quad J \longrightarrow K$$
$$x \rightarrowtail f(x)$$

a- *Démontrer que g est une bijection*

b- *Soit g^{-1} la bijection réciproque de g. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in K$*

Exercice 42.

1. *Pour tout nombre complexe z, on considère :*

$$f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$$

a- *Soit b un nombre réel.*
Exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaire de $f(ib)$

✓ *En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution*

b- *Montrer qu'il existe deux nombres réels α et β, que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z :*

$$f(z) = (z^2+9)(z^2+\alpha z+\beta)$$

c- *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $f(z) = 0$*

2. *Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé*

a- *Placer dans le plan (P) les points A, B, C et D ayant respectivement pour affixe:*

$$a = 3i,\ b = -3i,\ c = 5-2i,\ d = 5+2i$$

Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Calculer son aire en unité d'aire

c- *Déterminer l'affuxe de l'isobarycentre G des points A, B, C, D*

d- *Déterminer l'ensemble (E) des points M de (P) tel que :*

$$||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|| = 10$$

Tracer (E) sur la figure précédente

Exercice 43. *Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On donne le point $I(1,0)$ et les vecteurs $\vec{u}(-1,-1)$ et $\vec{v}(-2,3)$. Soit f l'application affine du plan (P) telle que $f(I) = I$ et dont l'application vectorielle associée g est définie par :*

$$g(\vec{u}) = 11\vec{i} + 7\vec{j} \qquad et \qquad g(\vec{v}) = -8\vec{i} + 6\vec{j}$$

1. *Déterminer $g(\vec{i})$ et $g(\vec{j})$*

2. *Soit $M(x,y)$ un point du plan (P) et $M'(x',y')$ l'image de M par f*

Je m'entraîne en Mathématiques

a- *Démontrer que :*

$$\overrightarrow{IM'} = (-5x - 6y + 5)\vec{i} + (3x + 4y - 3)\vec{j}$$

b- *En déduire l'expression analytique de f*

3. a- *Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite que l'on précisera*

b- *Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe pour tout point M de (P)*

c- *En déduire que f est une affinité dont on précisera les éléments caractéristiques*

Problème 20. *Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $\Re = (O;\ \vec{i},\ \vec{j})$*

Partie A

On désigne par (D_1) la droite d'équation :

$$x + y - 4 = 0$$

et par (Γ) la parabole de foyer O et de directrice (D_1)

1. *Déterminer par ses coordonnées le sommet S de (Γ)*

2. *Établir une équation cartésienne de (Γ) dans le repère $(\Re)$*

3. *On considère les vecteurs $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} - \vec{j})$*

a- *Démontrer que $\Re' = (S;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ est un repère orthonormé de (P)*

b- *Donner dans le repère $\Re'$ une équation cartésienne de (Γ)*

Partie B

On désigne par (Δ) la droite d'équation $x - y - 1 = 0$ et par $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ un vecteur du plan. Soit S_1 la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et t la translation du vecteur $\vec{u}$

1. *Définir analytiquement S_1 et t*

2. *Déterminer analytiquement les applications $g = S_1 \circ t$ et $h = t \circ S_1$*

3. *Démontrer que g est une symétrie glissée et en déduire le vecteur $\vec{v}$ et la droite (D_2) telle que :*

$$g = S_2 \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ S_2$$

où S_2 est la symétrie orthogonale d'axe (D_2)

4. *Soit la courbe (C) d'équation : $x^2 + 9y^2 - 6x = 0$*

a- *Donner la nature de (C) et ses éléments caractéristiques (centres, sommets, foyers, directrices et excentricité)*

b- *Déterminer l'image (C') de (C) par g*

5. a- *A partir de l'équation cartésienne du cercle de centre O et de rayon a $(a > 0)$, trouver sans calcule la valeur de l'intégrale :*

$$I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

b *Calculer I à l'aide du changement de variable $x = a\cos(u)$ avec $0 \leq u \leq \pi$*

c- *En déduire l'aire $A(a, b)$ du domaine intérieur à l'ellipse d'équation :*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

d- *Donner alors l'aire A du domaine plan intérieur à la courbe (C)*

Problème 21. *On choisi pour unité de longueur 4cm, et on muni le plan d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$*

Vous représenterai dans ce repère les courbes demandées. On fera cependant une figure propre à chaque partie du problème

Partie A

1. *On note E l'ensemble des nombres complexes z tels que $z - i\overline{z} \neq 0$ et on considère le fonction F qui à chaque élément de E, on associe le nombre complexe :*

$$F(z) = \frac{z + \overline{z} - i}{z - i\overline{z}}$$

- *Déterminer l'ensemble E et représenter-le graphiquement*

Par la suite, si z est un nombre complexe de E, son image sera le point M. On notera M' l'image de $F(z)$

Je m'entraîne en Mathématiques

2. *Résolvez dans C l'équation $F(z) = i$*

3. *z étant un élément de E, le point M qui le représente à pour coordonnées (x, y)*

   ✓ *Exprimer en fonction de x et de y les coordonnées du point M'*

4. *Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des points M d'affixe z tels que $F(z)$ soit imaginaire pur*

5. *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe de E*

   - *Démontrer que le module de $F(z)$ est égal à $\sqrt{2}$ si et seulement si x et y sont liées par la relation $4y^2 - 8xy - 1 = 0$*

Partie B

Le but de cette partie est de représenter l'ensemble Γ des points M d'affixes z tels que $F(z) = \sqrt{2}$ c'est à dire la courbe d'équation $4y^2 - 8xy - 1 = 0$

On considère les fonctions numériques f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1} \qquad et \qquad g(x) = x - \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}$$

On notera Γ_1 la courbe de f et Γ_2 celle de g

1. a- *Démontrer que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$*

   b- *Démontrer que les courbes Γ_1 et Γ_2 sont symétriques par rapport à O*

2. a- *Étudier les variations de la fonction f*

   b- *Démontrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à Γ_1 au voisinage de $+\infty$ et préciser la position de Γ_1 par rapport à cette asymptote*

   c- *Représenter la courbe Γ_1. On tracera la tangente à Γ_1 au point d'intersection de Γ_1 avec l'axe des ordonnées*

3. *Représenter la courbe Γ*

4. *Soit la fonction k définie de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty[$ par $k(x) = f(x)$*

   - *Démontrer que k est bijective puis déterminer sa réciproque k^{-1}*
   - *Construire la courbe (C) de k^{-1} dans le même repère que Γ_1*

5. *On se propose de déterminer, en cm^2, l'aire A du domaine compris entre la courbe Γ_1, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$*

   a- *Exprimer cette aire sous forme d'intégrale*

   b- *Calculer l'intégrale*

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2+\sqrt{5}}{2}} \frac{4x^2-1}{8x}\,dx$$

   et l'interpréter graphiquement

   - *Déduis-en l'aire A cherchée*

Exercice 44. *Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$*

On considère la transformation f_t de (P) dont l'expression analytique est :

$$\begin{cases} x' = tx - y - 1 \\ y' = -x - tx \end{cases}$$

où t est une constante réelle

1. a- *Déterminer l'écriture complexe de f_t*

   b- *Déterminer suivant les valeurs de t la nature précise de f_t et préciser dans chaque cas, les éléments caractéristiques de f_t*

2. *On pose $t = 1$*

   Soit (E) l'ensemble des points $M(x, y)$ de (P) tels que : $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0$

   a- *Démontrer que l'image (E') de (E) par f_1 est la conique d'équation :*

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

   - *Préciser les éléments caractéristiques (sommets, foyers, directrices et excentricité) de (E')*

Exercice 45. *Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$.*

Soit φ la transformation du plan P dont l'expression analytique est :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Je m'entraîne en Mathématiques

1. a- *Déterminer l'écriture complexe de* φ

   b- *Justifier que* φ *est une similitude plane directe dont on précisera le centre* Ω*, le rapport* k *et une mesure* θ *de l'angle*

2. *On note* A_0 *le point* O *et pour tout entier naturel* n*, on pose* $A_{n+1} = \varphi(A_n)$

   a- *Déterminer les affixes des points* A_1*,* A_2 *et* A_3

   b- *Pour tout entier naturel* n*, on pose :* $u_n = \Omega A_n$

   b_1- *Justifier que* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison* q

   b_2- *Exprimer* u_n *en fonction de* n

   c- *A partir de quel rang* n_0 *tous les points* A_n *appartiennent-ils au disque de centre* Ω *et de rayon* $\frac{1}{10}$ *?*

3. a- *Quelle est la nature du triangle* $\Omega A_0 A_1$ *?*

   ✓ *En déduire, pour tout entier naturel* n*, la nature du triangle* $\Omega A_n A_{n+1}$

   b- *Pour tout entier naturel* n*, on note* L_n *la longueur de la ligne brisée* $A_0A_1A_2...A_{n-1}A_n$.
   On a ainsi : $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \ ... \ + A_{n-1}A_n$

   • *Exprimer* L_n *en fonction de* n *et déterminer la limite de la suite* $(L_n)_{n\geq 0}$

Problème 22. ***Partie A***

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{i}, \vec{j})$

1. S *est la transformation qui à tout point* M *de coordonnées* (x, y) *associe le point* M' *de coordonnées* (x', y') *tel que :*

$$\begin{cases} x' &= -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' &= \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

   a- *Démontrer que* S *admet une droite* (D) *comme ensemble de points invariants*

   b- *Montrer que, pour tout point* M*, non situé sur* (D)*, la droite* (MM') *est perpendiculaire à* (D) *et le milieu de* $[MM']$ *est situé sur* (D)

   c- *Caractériser* S

2. R *est la transformation du plan qui à tout point* M *de coordonnées* (x, y) *associe le point* M' *de coordonnées* (x', y') *tel que :*

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' &= \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

   a- *Montrer que le seul point* O *est invariant par* R

   b- *Montrer que* R *est une isométrie*

   c- *Quelle est alors la nature de* R *?*

3. a- *Montrer sans calculs, que la composée* $f = R \circ S$ *est une isométrie orthogonale par rapport à une droite* (Δ)

   b- *Déterminer les coordonnées* (x'', y'') *de* $M'' = f(M)$ *en fonction de celles de* (x, y) *du point* M.

   • *Déterminer alors une équation de la droite* (Δ)

4. *Soit* (C) *la courbe représentative d'équation :* $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{x}$

   a- *Étudier la fonction :*

$$u : \qquad x \rightarrowtail \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{x}$$

   et tracer sa courbe (C)

   b- *Déterminer l'image de* (C) *par* S

Partie B

✠ *Un second graphique est conseillé !!*

On considère un losange $ABCD$ *tel que :*

$$AB = BC = CD = DA \qquad et \qquad mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}$$

On désigne par I*,* J*,* K*,* L *et* O *les milieux respectifs des segments* $[AB]$*,* $[BC]$*,* $[CD]$*,* $[DA]$ *et* $[BD]$
On note (Δ_1) *la médiatrice de* $[AB]$ *et* (Δ_2) *la médiatrice de* $[CD]$

1. *Soit* σ *l'isométrie du plan définie par :* $\sigma(A) = B$*,* $\sigma(B) = D$ *et* $\sigma(D) = C$

   a- *Prouver que* σ *est un antidéplacement*

Je m'entraîne en Mathématiques

b- *Démontrer que s'il existe un point M invariant par σ, alors M est équidistant des points A, B, C et D*

c- *L'isométrie σ a t-elle un point invariant ?*

2. *Soit σ' la symétrie orthogonale d'axe (Δ_1) et r la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$*

a- *Démontrer que $\sigma = r \circ \sigma'$*

b- *A t-on : $\sigma = \sigma' \circ r$?*

3. *Soit S_1 la symétrie orthogonale d'axe (BC)*

a- *Déterminer l'axe de la symétrie orthogonale S_2 telle que : $r = S_1 \circ S_2$*

b- *En déduire que $\sigma = S_1 \circ t_1$ où t_1 est une translation que l'on précisera*

4. *Soit t_2 la translation du vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. On note t_2^{-1} sa réciproque et on pose $g = t_2^{-1} \circ \sigma$*

a- *Déterminer $g(D)$, $g(I)$ puis $g(O)$.*

✓ *En déduire la nature précise de la transformation g*

Problème 23. ***Partie A***

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 - \sqrt{-x-1} & si\ x \in]-\infty, -1] \\ \frac{(x+1)\ln(x+1)}{x} & si\ x \in]-1, +\infty[\\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. *Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x_0 = -1$*

2. a- *Écrire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \rightarrowtail \ln(x+1)$*

b- *Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0*

3. *Soit la fonction*

$$u : \quad IR \longrightarrow IR$$
$$x \rightarrowtail x - \ln(x+1)$$

- *Étudier :*

a- *Les variations de u*

b- *Le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x*

4. *Achever l'étude des variations de f*

Partie B

5. *Soit la fonction :*

$$v : \quad]-1, +\infty[\longrightarrow IR$$
$$x \rightarrowtail (x+1)\ln(x+1) - x^2$$

a- *Démontrer que : $\forall x \in]-1, 0[,\ v(x) < 0$*

b- *Étudier sur $[0, +\infty[$ les variations de la fonction v' de v*

c- *Démontrer que l'équation $v'(x) = 0$ admet dans $[0, +\infty[$ une solution unique α*

6. *Justifier que :*

a- $0 < \alpha < 1$

b- $v(\alpha) = \alpha^2 + \alpha - 1$

7. a- *Démontrer, à l'aide des variations de v, que l'équation $v(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique β telle que $1 < \beta < 2$*

b- *Étudier le signe de $v(x)$ suivant les valeurs de x dans $\mathbb{R}_+^*$*

c- *Étudier la position relative de (C) par rapport à la droite d'équation $y = x$*

8. a- *Tracer (C) ainsi que la droite d'équation $y = x$*

b- *Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$*

c- *Construire la courbe (C') représentative de f^{-1} dans le même repère que (C)*

Partie C

Je m'entraîne en Mathématiques

9. *Soit la fonction :*

$$h : \quad]-1,+\infty[\longrightarrow IR$$

$$x \rightarrowtail 2x - 2\ln(1+x) - x^2$$

a- Étudier les variations de h

✓ *Calculer $h(0)$ et étudier le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x*

b- En quel point de (C) la tangente est-elle parallèle à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 3$

c- Écrire une équation cartésienne de la tangente à (C) en ce point

10. *Soit m un paramètre réel*

✓ *Déterminer graphiquement, suivant les valeurs de m le nombre et le signe des racines de l'équation*

$$2f(x) - x + m = 0$$

Exercice 46.

1. *Démontrer que 233 est un nombre premier*

2. *a- Déterminer un couple (u,v) d'entiers relatifs tels que $233u + 31v = 1$*

   b- En déduire l'inverse de 31 dans $Z/233Z$

3. *Résoudre dans Z^2 l'équation $(E) : 233x + 31y = 2$ d'inconnue (x,y)*

   Soit (a,b) un couple solution de (E) tel que a et b sont premiers entre eux

✓ *Calculer $pgcd(a^2, b^3)$*

Exercice 47.

1. *Trouver l'ensemble des entiers naturels diviseurs du nombre 5929*

2. *Trouver les couples (a,b) d'entiers naturels dont le pgcd et le ppcm sont les solutions de l'équation :*

$$x^2 - 91x + 588 = 0$$

Exercice 48. *On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2*

On imagine n sacs S_1, S_2, ..., S_n

Au départ le sac S_1 contient deux jetons noirs et un jeton blanc, et chacun des autres sacs contient chacun un jeton noir et un jeton blanc

On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :

- *Première étape : On tire au hasard un jeton de S_1*
- *Deuxième étape : On place ce jeton dans S_2 et on tire au hasard un jeton de S_2*
- *Troisième étape : Après avoir placer dans S_3 le jeton sorti de S_2, on tire au hasard un jeton de S_3 ... et ainsi de suite*

Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, on note E_k l'événement "le jeton sorti de S_k est blanc" et $\overline{E}_k$ l'événement contraire

1. *a- Déterminer $p(E_1)$, et les probabilités conditionnelles $p(E_2/E_1)$ et $p(E_2/\overline{E}_1)$*

   ✓ *En déduire $p(E_2)$*

   b- Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, la probabilité de E_k est notée p_k

   ✓ *Justifier la relation*

$$p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$$

2. *On considère la suite (u_k) définie par $u_1 = \frac{1}{3}$ et pour tout entier naturel $k \geq 1$*

$$u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3}$$

   Soit α un réel

   a- On pose $u_k = v_k + \alpha$

   Déterminer α pour que la suite (v_k) soit une suite géométrique

   b- En déduire l'expression de u_k en fonction de k puis déterminer

$$\lim_{k \to +\infty} u_k$$

3. *Dans cette question on pose $n = 10$*

   Pour quelles valeurs de k a-t-on $0.4999 \leq p_k \leq 0.5$?

Je m'entraîne en Mathématiques

Problème 24. *On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} & si\ x \leq 0 \\ \\ \frac{\ln(x)}{x-\ln(x)} + 1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$

Partie 1

1. a- *Étudier les variations de la fonction u définie sur $]0,+\infty[$ par $u(x) = x - \ln(x)$*
   b- *En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$, $x - \ln(x) \neq 0$*
2. *Soit D l'ensemble de définition de f*
   a- *Démontrer que $D = [-1,+\infty[$*
   b- *Démontrer que f est continue sur D*
   c- *Étudier la dérivabilité de f en 0 puis donner une interpretation géométrique des résultats obtenus*
   d- *Étudier la dérivabilité de f à droite en -1*
3. a- *Étudier les variations de f*
   b- *Construire la courbe (C)*

Partie 2

4. *On pose $I = [-1,0]$ et $J = f(I)$*
   Soit la fonction :

$$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

   et (C') sa courbe représentative dans le repère $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$
   a- *Démontrer que g est bijective*
   Soit g^{-1} la bijection réciproque de g
   b- *Dresser le tableau de variation de g^{-1} puis construire sa courbe (Γ) dans le même repère que (C)*
   c- *Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x dans J*
   d- *Calculer*

$$\int_{-1}^{0} [g^{-1}(x)]\,dx$$

5. *Soit A l'aire du domaine plan délimité par la courbe (Γ), la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$*
   a- *Calculer A*
   b- *En déduire l'aire du domaine plan compris entre les courbes (C') et (Γ)*

Partie 3

Pour tous nombres réels x et y tels que $0 < y < 1$, on considère le nombre complexe z défini par :

$$z = x + i\frac{y-1}{1+\sqrt{2y-y^2}} \qquad avec \quad i^2 = -1$$

Soit (Γ') l'ensemble des points M d'affixes z tel que $\arg(z) = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z$

6. *Soit u un nombre complexe non nul*
   a- *Démontrer que :*

$$(\arg(u) = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z) \Leftrightarrow \begin{cases} Re(u) = Im(u) \\ \\ Im(u) < 0 \end{cases}$$

7. *Soit M un point d'affixe z du plan*
   a- *Établir que :*

$$(M \in (\Gamma')) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{1+\sqrt{1-(y-1)^2}} \\ \\ 0 < y < 1 \\ \\ -1 < x < 0 \end{cases}$$

   b- *En déduire que $(M \in (\Gamma')) \Leftrightarrow (y = g^{-1}(x) + 1)$*
   c- *Démontrer que (Γ') est l'image d'une partie de (Γ) par une translation t et caractériser t*
8. a- *En déduire que (Γ') est l'image de (C') par la composée d'une symétrie orthogonale et de la translation t*
   b- *Préciser les éléments caractéristiques de cette composée*

Je m'entraîne en Mathématiques

Problème 25. *Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$ (unité 2cm)*

f est la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \sqrt{x^2+5}$ et (C) la courbe représentative de f

Partie A

1. *Étudier les variations de f*
2. *On pose $K = f(IR)$ et on considère l'application*

$$g : \quad IR \longrightarrow K$$
$$x \rightarrowtail f(x)$$

   a- *Démontrer que g est une bijection*

   b- *Soit g^{-1} la bijection réciproque de g et (C') la courbe représentative de g^{-1}*

   ✓ *Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x élément de K*

3. a- *Résoudre dans Z^2 l'équation $y^2 - 2xy - 5 = 0$ d'inconnue (x, y)*

   b- *En déduire les points de la courbe (C) dont les coordonnées sont des entiers relatifs*

Partie B

Soit M et M' deux points distincts de (C) d'abscisse opposées

4. a- *Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe que l'on précisera*

   b- *Démontrer que l'application affine s du plan qui transforme M en M' à pour expression analytique :*

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2x + y \end{cases}$$

5. a- *Déterminer l'ensemble des points invariants par s*

   b- *Démontrer que pour tout point M d'image M' par s, le milieu de $[MM']$ appartient à la droite de repère $(O;\ \vec{v})$*

   c- *Quelle est la nature de s*

   d- *On désigne par Δ l'axe des abscisses*

      i- *Déterminer l'image Δ' de Δ par s*

      ii- *Démontrer que Δ et Δ' sont les asymptotes de (C)*

      iii- *Préciser les asymptotes de la courbe (C')*

   e- *Construire les courbes (C) et (C') dans le même repère*

Partie C *On note E l'ensemble des nombres complexes z tels que $z - i\bar{z} \neq 0$ et pour tout z élément de E, on pose :*

$$z' = \frac{z + \bar{z} - 2i\sqrt{5}}{z - i\bar{z}}$$

6. *Déterminer E*
7. *Soit z un élément de E ; on désigne par M l'image de z et on pose $z = x + iy$, x et y étant des nombres réels*

   a- *Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M tels que $|z'| = \sqrt{2}$ est la réunion de (C) et de son symétrique par rapport à O*

   b- *Construire (Γ) dans le même repère que (C)*

   c- *Déterminer une équation cartésienne de (Γ) dans le repère $(O;\ \vec{u},\ \vec{u} + 2\vec{v})$*

Exercice 49.

1. *Résoudre dans Z^2 l'équation : $3x - 8y = 1$*
2. *Un entier non nul N s'écrit $\overline{b0a}$ dans le système de numération de base 5 et $\overline{abc}$ dans la base 7*

   a- *Démontrer que c est divisible par 6*

   b- *Déterminer les entiers a, b et c*

   c- *Donner l'expression de N dans le système décimal*

3. *L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$, on considère la droite (Δ) de repère $(A;\ \vec{u})$ avec $A(1, 2, 3)$ et $\vec{u}(3, -8, 2)$, et le plan (P) d'équation $z = -4$*

   a- *Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) orthogonal à la droite (Δ) au point A*

   b- *On pose $(\Delta_1) = (P) \cap (Q)$*

   ✓ *Déterminer tous les points de (Δ_1) dont les coordonnées sont des nombres entiers appartenant à l'intervalle $[-20, 20]$*

Je m'entraîne en Mathématiques

c- *En déduire les points de* (Δ_1) *à coordonnées entières situé le plus près de l'origine*

Problème 26. *Soit* f *la fonction numérique définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - x^2 + 2x & si\ x < 1 \\ 2 + \ln(\frac{x+1}{2x}) & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

On désigne par (Γ) *la courbe représentative de* f *dans le plan muni orthonormé* $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$

Partie 1

1. *Justifier que l'ensemble de définition de* f *est* $\mathbb{R}$
2. *Étudier la dérivabilité de* f *en* $x_0 = 1$
3. *Étudier les variations de la fonction* f
4. a- *Démontrer que la courbe* (Γ) *admet deux asymptotes dont l'une est une partie d'une conique* (P)
   b- *Préciser la nature et les éléments caractéristiques de cette conique*
5. *Construire* (Γ), (P) *et les demi-tangentes au point d'abscisse* 1

Partie 2

Soit g *l'application définie par :*

$$g : \quad [1, +\infty[\longrightarrow f([1, +\infty[)$$
$$x \longmapsto f(x)$$

On note (C_1) *la courbe représentative de* g *dans le plan muni du repère* $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$

6. a- *Déterminer* $f([1, +\infty[)$
   b- *Justifier que* g *admet une bijection réciproque* g^{-1}
   c- *Démontrer que :*

$$\forall x \in f([0, +\infty[), \quad g^{-1}(x) = \frac{1}{2e^{x-2} - 1}$$

7. *Soit* h *la fonction définie sur* $I =]-\ln(2), 0]$ *par*

$$h(x) = \frac{2e^x}{2e^x - 1}$$

   a- *Justifier que* $h(x) = 1 + g^{-1}(x+2)$
   b- *En déduire que la courbe* (C_h) *de* h *est l'image de* (C_1) *par un antidéplacement* θ
   c- *Préciser la nature et les éléments caractéristiques de* θ

8. *On note* (C') *la courbe représentative de* g^{-1}. *Construire* (C')

9. *Calculer l'aire* A *du domaine plan limité par la courbe* (Γ), *les droites d'équations* $x = 1,\ x = 3$ *et* $y = 2 - \ln(2)$

Problème 27. *Soit la fonction* f *de la variable réel* x *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 2\ln(x)} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Le plan (P) *est muni du repère orthonormé* $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$. *On désigne par* (C) *la courbe représentative de* f *dans le plan* (P)

Partie A

1. a- *Étudier les variations de la fonction*

$$u : \quad IR \longrightarrow IR$$
$$x \longmapsto x^2 - 2\ln(x)$$

   b- *Préciser le signe de* $u(x)$ *pour tout réel* x *strictement positif*

2. a- *Étudier la continuité et la dérivabilité de* f *au point* $x_0 = 0$
   b- *Donner une interpretation géométrique des résultats obtenus*
   c- *Achever l'étude des variations de* f
   d- *Construire* (C)

Partie B

Je m'entraîne en Mathématiques

3. *Soit la suite (u_n) définie sur IN^* par :*

$$u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx$$

a- *Donner une interprétation géométrique de la suite (u_n)*

b- *Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :*

$$\frac{n^2-n}{1+2n^2\ln(n)} \leq u_n \leq 1-\frac{1}{n}$$

c- *Étudier le sens de variation de (u_n)*

d- *Démontrer que la suite (u_n) converge vers un nombre réel l*

e- *Exprimer en fonction de l, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=0$*

Partie C

4. *On désigne par (H) l'ensemble des points M dont les coordonnées (x,y) dans le repère $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ vérifient les relations :*

$$\begin{cases} y > 2 \\ x = \frac{1}{(y-2)^2-\ln[(y-2)^2]}+1 \end{cases}$$

a- *Démontrer qu'il existe une droite Δ et un vecteur $\vec{u}$ non nul tels que :*

$$(H) = (t_{\vec{u}} \circ S_\Delta)(C)$$

avec $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ et S_Δ la symétrie orthogonale d'axe Δ

b- *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$*

c- *Construire (H)*

Exercice 50. *Dans le plan orienté, on considère un triangle OAB direct et rectangle en O*

On désigne par J le milieu de $[AB]$. M est un point variable de la droite (Δ) perpendiculaire en A à (AB)

La perpendiculaire en O à (OM) coupe (AB) en M'

1. *Soit s la similitude de centre O telle que $s(A)=B$*

a- *Montrer que, pour tout point M de (Δ), $s(M)=M'$*

b- *En déduire que, lorsque M décrit (Δ), le triangle OMM' reste semblable à un triangle fixe que l'on précisera*

2. a- *Montrer que, pour tout point M de (Δ), le point I milieu de $[MM']$ est l'image de M par une similitude S de centre O dont-on précisera la rapport et l'angle*

b- *Soit H le projeté orthogonal de O sur (Δ). Déterminer $S(H)$*

c- *Déterminer le lieu géométrique du point I lorsque M décrit (Δ)*

3. a- *Pour tout point M de (Δ) distinct de A, on désigne par P le point tel que $MAM'P$ est un rectangle*

✓ *Déterminer le lieu géométrique du point P lorsque M décrit "$(\Delta)-\{A\}$"*

Problème 28. *Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$*

Partie A

On considèredans l'ensemble C des nombres complexes, le polynôme :

$$P(z) = z^3 - [2+(3+\sqrt{2})i]z^2 + [-5-3\sqrt{2}+(2\sqrt{2}+1)i]z + \sqrt{2}+5i\sqrt{2}$$

1. a- *Démontrer que $P(z)$ peut s'écrire sous la forme :*

$$P(z) = (z+1-i)Q(z)$$

où Q est un polynôme de degré 2 que l'on précisera

b- *Écrire sous forme algébrique le nombre complexe*

$$d = [3+(2-\sqrt{2})i]^2$$

c- *Résoudre dans C l'équation $P(z)=0$*

2. *On considère la transformation f du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z, associe le point $M'=f(M)$ d'affixe z' définie par :*

$$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{z} - 1 + i(1+\sqrt{2})$$

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1+i$, $3+2i$ et $i\sqrt{2}$

Je m'entraîne en Mathématiques

a- *Calculer les affixes respectives des points A' et C', images respectives de A et C par f*

b- *En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f*

Partie B

On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$. On pose $g = f \circ h$

3. a- *Déterminer l'écriture complexe de h*

   b- *Démontrer que g à pour écriture complexe : $z' = (1+i)\overline{z} - 1 + 3i$*

4. a- *Soit M un point du plan d'affixe $z = x + iy$ avec x, y entiers. On note $N = g(M)$*

   • *Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont orthogonaux si et seulement si : $5x+3y = 15$*

   b- *Résoudre dans Z^2 l'équation : $5x + 3y = 15$*

   c- *En déduire les points M du plan dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5, 5]$ et tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}$ soient orthogonaux.*

Partie C

Soit φ la transformation plane d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$$

5. *Démontrer que φ est une symétrie glissée*

6. *Démontrer que $r = g \circ \varphi$ à pour écriture complexe : $z' = (1-i)z$*

7. *Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) vérifiant :*

$$5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y = 0$$

   a- *Déterminer une équation cartésienne de $(\Gamma') = r(\Gamma)$*

   b- *Démontrer que (Γ') est une ellipse dont-on précisera le centre et les sommets*

   c- *En déduire que (Γ) est une ellipse dont-on précisera le centre et les sommets*

Exercice 51. *Le plan complexe (P) est muni du repère orthonormé direct $(O;\ I,\ J)$*

On lance à la fois deux dés parfaits D_1 et D_2 et on note le nombre marqué sur la face supérieure de chacun d'eux lorsqu'ils sont tombés

✓ *Sur les faces du dé D_1 sont marqués $\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ 1,\ -1,\ \sqrt{3},\ -2$*

✓ *Sur les faces du dé D_2 sont marqués $1,\ -1,\ \sqrt{3},\ \frac{1}{2},\ 0,\ 1$*

On note u le nombre relevé sur D_1 et v celui relevé sur D_2

On définit les transformations f et g du plan (P), d'écriture complexes respectives

$$z' = az + 1 + i \qquad et \qquad z' = \overline{az} + i \quad avec\ a = u + iv$$

1. a- *Déterminer la probabilité pour que f soit une similitude plane directe*

   b- *Calculer la probabilité pour que g soit un antidéplacement*

2. *Calculer la probabilité de chacun des événement suivants :*

   A : "f est une rotation d'angle droit "

   B : "f est une homothétie "

   C : "f est une similitude plane directe de centre I "

3. *On donne $u = 1$ et $v = -1$ et on pose $h = g \circ f$*

   a- *Déterminer la nature de h*

   b- *Préciser les éléments caractéristiques de h*

   c- *Déterminer les coordonnées du centre et des sommets de l'image de l'ellipse (E) d'équation cartésienne $x^2 + 4y^2 = 2$ par h^{-1}*

Problème 29. *On considère dans l'espace $\pounds$ un cube $ABCDEFGH$.*

On désigne par (P) le plan (BGE) et par (Q) le plan perpendiculaire à (P) et contenant la droite (BG)
Soit I le point d'intersection de (P) et de la droite (DF)

Partie A

1. a- *Démontrer que les droites (EG) et (EB) sont orthogonales respectivement aux plans (DHF) et (DFG)*

   b- *En déduire que la droite (DF) est orthogonale au plan (P)*

2. a- *Déterminer $(Q) \cap (P)$*

   b- *Démontrer que (DF) est parallèle à (Q)*

Je m'entraîne en Mathématiques

3. a- *Démontrer que A est le barycentre des points B, C et D affectés des coefficients que l'on déterminera*

   b- *Déterminer l'ensemble S des points de £ tels que :*

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = MC^2$$

4. *Soit h l'application de £ dans £ qui à tout point M de £ associe le point M' de £ définie par :*

$$\overrightarrow{CM'} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$$

✓ *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h*

Partie B

L'espace £ est associe au repère orthonormé direct $(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE})$.

Unité graphique 1cm

5. a- *Déterminer une équation cartésienne de (P)*

   b- *Déterminer les coordonnées de I*

6. *Déterminer une équation cartésienne de (Q)*

7. *Calculer le volume de l'image par h de la pyramide $IABCD$ de base $ABCD$*

Partie C

Soit f l'application affine de £ dans £ d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{3}(x + 2y - 2z + 2) \\ y' &= \frac{1}{3}(2x + y + 2z - 2) \\ z' &= \frac{1}{3}(-2x + 2y + z + 2) \end{cases}$$

8. *Soit M un point quelconque de £, d'image M' par f*

   a- *Démontrer que le milieu du segment $[MM']$ appartient au plan (P)*

   b- *Démontrer que $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur normal de (P)*

9. *Déterminer l'ensemble des points de l'espace invariants par f*

✓ *En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f*

Problème 30. *$ABCDEFGH$ est un cube tel que $(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé direct de l'espace £.*

On pose $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{j} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{AE}$

On muni l'espace £ du repère orthonormé direct $(A;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k})$

On considère dans £ les points $K(\frac{1}{2},\ 0,\ 0)$, $L(\frac{1}{2},\ 1,\ 0)$ et $S(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$

Partie A

1. *Soit t l'application de £ dans £ qui à tout point M associe le point M' tel que :*

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MF}$$

✓ *Justifier que t est une translation*

2. a- *Calculer la distance du point S au plan (ABC)*

   b- *En déduire que $SABCD$ est une pyramide*

   c- *Calculer le volume de l'image par t de la pyramide $SABCD$*

3. *Soit f_1 la réflexion de plan (SAB) et f_2 la réflexion de plan (SCD)*

   a- *Démontrer que les plans (SAB) et (SCD) sont perpendiculaires*

   b- *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f_1 \circ f_2$*

4. a- *Déterminer l'expression analytique de f_1*

   b- *Déterminer l'image par $f_1 \circ f_2$ de la droite (SC)*

5. *On pose : $P_1 = (SAB)$ et $P_2 = (SCD)$*

✓ *Déterminer la position relative de $t(P_1)$ et $t(P_2)$*

Partie B

On désigne par (π) le plan orienté par le vecteur $\overrightarrow{i}$, muni du repère orthonormé direct $(A;\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k})$

Je m'entraîne en Mathématiques

Soit r l'application de (π) dans (π) qui à tout point $M(X,Y)$ associe le point $M'(X',Y')$ tel que :

$$\begin{cases} X' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y-1+\sqrt{2}) \\ Y' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y-1) \end{cases}$$

et h l'application de (π) dans (π) qui à tout point $M(X,Y)$ associe le point $M'(X',Y')$ tel que :

$$\begin{cases} X' &= \frac{\sqrt{2}}{2}X-\sqrt{2}+1 \\ Y' &= \frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{cases}$$

6. *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de r*
7. *On pose $s = r \circ h$. On admet que (π) est le plan complexe. Soit z l'affixe du point M et z' l'affixe du point $s(M)$*
   - a- *Exprimer z' en fonction de z*
   - b- *Déterminer la nature de s et préciser ses éléments caractéristiques*
8. *Soit (Γ) la courbe d'équation : $4X^2+Y^2+16X+7=0$ dans le repère $(A;\ \vec{j},\ \vec{k})$*
   - a- *Construire (Γ)*
   - b- *On pose $(\Gamma') = s(\Gamma)$*
     - *Déterminer la nature de (Γ')*
   - c- *Préciser les coordonnées du centre et des sommets de (Γ')*

Problème 31. *Soit m un paramètre réel appartenant au segment $[-1,1]$*

Partie A

On se propose de déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$g_m \ : \ x \longmapsto \ln(mx+\sqrt{x^2+1})$$

1. *Soit la fonction f_m : $x \longmapsto mx+\sqrt{x^2+1}$*
   - ✓ *Calculer suivant les valeurs de m les limites de f_m aux bornes de son ensemble de définition*
2. *Étudier les variations de la fonction dérivée première f'_m de f_m*
3. *On suppose que m appartient à l'intervalle ouvert $]-1,1[$*
   - a- *Démontrer que l'équation $f'_m(x)=0$ admet de solution unique x_0*
   - b- *Préciser le signe de $f'_m(x)$ suivant les valeurs de x*
   - c- *Démontrer que $f'_m(x_0) = \frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}$*
4. - a- *Préciser le signe de $f'_1(x)$ puis celui de $f'_{-1}(x)$*
   - b- *Déduire des questions précédentes, l'ensemble de définition de g_m*

Partie B

On désigne par Γ_1 et Γ_{-1} les courbes respectives des fonctions g_1 et g_{-1} dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$

5. *Démontrer que Γ_{-1} et Γ_1 sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des abscisses*
6. *Étudier les branches infinies de la courbe Γ_{-1}*
7. - a- *Donner une équation cartésienne de la tangente (Δ) à la courbe Γ_{-1} en son point d'abscisses nulle*
   - b- *Étudier la position de Γ_{-1} par rapport à (Δ).*
   - ⊗ *On pourra étudier les variations de la fonction h : $x \longmapsto x+g_{-1}(x)$*
   - ✓ *En déduire que le point O est un point d'inflexion pour la courbe Γ_{-1}*
8. *Tracer la courbe Γ_{-1} et en déduire le tracer de la courbe Γ_1*
9. *On considère le domaine du plan D délimité par la courbe Γ_1, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$*
   - *Calculer le volume du solide engendré par la rotation de D autour de l'axe $(O;\ \vec{i})$. [On pourra utiliser une double intégration par parties]*

Exercice 52. *m est paramètre réel.*

On considère la fonction f_m de variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{mx}{x-1}+\ln(-x+1)+1 & si\ x<0 \\ (1-mx\ln(2))2^x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Je m'entraîne en Mathématiques

1. a- *Démontrer que f_m est continue sur $\mathbb{R}$*
   b- *Étudier, suivant les valeurs de m, la dérivabilité de f_m au point $x = 0$*
   c- *Déterminer la fonction dérivée première de f_m sur $\mathbb{R}^*$*
2. a- *Étudier les variations de la fonction f_1 correspondant à $m = 1$*
   b- *Tracer la courbe représentative (Γ) de f_1 dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 2cm$*
3. *Calculer l'aire du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et les droites d'équations respectives $x = -1$, $x = 3$*

Exercice 53.

1. *Résoudre dans le corps des nombres complexes, l'équation :*

$$iz^3 - 3(3+2i)z^2 - 31iz + 23 - 6i = 0$$

sachant qu'elle admet une racine complexe imaginaire pure qu'on notera z_0. Les autres racines seront notées z_1 et z_2 avec $|z_1| < |z_2|$

2. *Dans le plan complexe, on désigne par M_0, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2*

✓ *Déterminer la similitude directe s du plan qui transforme M_1 en M_0 et M_0 en M_2*

3. *Déterminer les éléments caractéristiques de s : (centre, rapport, axe)*

Problème 32. *(P) désigne le plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $R = (O; \vec{i}, \vec{j})$ (Unité 1cm)*

On considère la fonction numérique f_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_m(x) = \begin{cases} \sqrt{|x^2 - 6x + 5|} & si\ x \leq 3 \\ (x-3) - m\ln(x-3) & si\ x > 3 \end{cases}$$

m étant un paramètre réel

On désigne par (Γ_1) et (C_m) les courbes représentatives respectives des restrictions de f_m à $]-\infty, 3]$ et à $]3, +\infty[$ dans le plan (P)

Partie A

1. a- *Démontrer que (Γ_1) est une portion de la réunion d'un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon et d'une hyperbole (H) dont on précisera le centre, les sommets et les asymptotes*
   b- *Construire (Γ_1)*
   c- *En déduire la valeur de : $\int_1^3 f_m(x)\,dx$*
2. *Étudier suivant les valeurs de m les variations de f_m sur $]3, +\infty[$*
3. a- *Déterminer l'ensemble I des valeurs de m pour lesquelles la fonction f_m admet un minimum sur $]3, +\infty[$*
   b- *Soit B_m le point de (C_m) ayant pour ordonnée le minimum de f_m*
   ✓ *Déterminer l'ensemble décrit par B_m lorsque m varie dans I*
4. a- *Étudier suivant les valeurs de m, la position relative de (C_m) et de la droite d'équation $y = x - 3$*
   b- *Construire la courbe (C_2)*
   c- *Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 4*
   • *Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_2), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 4$ et $x = \lambda$*

Partie B

On considère la rotation r du plan (P) de centre $J(3, 0)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

5. *On pose : $C_2' = \{M(x; y) \in (C_2) \mid x \geq 5\}$*
   • *Déterminer l'image (Γ) de C_2' par r*
6. a- *Démontrer qu'il existe une et une seule droite (Δ') passant par le point J, que l'on précisera, telle que l'on ait : $r = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ où $S_{\Delta'}$ et S_Δ désignent respectivement les symétries orthogonales de (P) par rapport à (Δ') et à (Δ)*
   b- *En déduire une méthode géométrique pour la construction de la courbe (Γ)*
   c- *Construire (Γ)*

Exercice 54. *Dans le plan complexe P et pour un paramètre réel k,*

on considère l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ (x et y réels) associe le point M' d'affixe z_k par :

$$z_k = x^2 - 4 + y(y - i) + ik$$

Je m'entraîne en Mathématiques

1. *Écrire z_k en fonction de k, z et du conjugué $\overline{z}$ de z*

2. *Déterminer :*

   a- *Le sous-ensemble E_1 de P décrit par le point M lorsque M' décrit l'axe des réels*

   b- *Le sous-ensemble E_2 de P décrit par le point M lorsque M' décrit l'axe des imaginaires purs*

3. *Déterminer le réel k de $]-2,2[$ pour que le cercle C de centre ω de coordonnées $(0,8)$ soit tangent en M_0 et M_1 aux droites (OM_0) et (OM_1), M_0 et M_1 étant les points communs à E_1 et E_2*

   ✓ *Donner dans ces conditions les coordonnées de M_0 et M_1*

Exercice 55. *La température du sol du village de Sohoun est de $15℃$. En creusant le sol, cette température reste constante pour les 10 premières mètres et varie après de $1℃$ tous les $3,5m$*

1. *Trouver la profondeur d'un puits foré à Sohoun sachant que la température au fond de cette puits est $35℃$*

   Le forage de ce puits est payé par tranche de $10m$. La première tranche coûte $2000F$ et toute autre tranche coûte deux fois plus cher que la précédente

2. *Combien doit-on payer lorsqu'on atteint une profondeur de :*

   a- *20 mètres ?*

   b- *$10k$ mètres ? $k \in IN^*$*

3. *Combien a-t-on dépensé pour forer ce puits ?*

Exercice 56. *On considère dans l'espace E rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$, le point $A(2,\ 4,\ 6)$*

M étant un point quelconque de E, on désigne ses coordonnées par $(x,\ y,\ z)$

1. a- *Donner l'expression analytique du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$*

   b- *Caractériser l'ensemble E_k des points $M(x,\ y,\ z)$ tels que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = k$ où k est un paramètre réel*

2. *Démontrer que le point $B(\frac{k}{28},\ \frac{k}{14},\ \frac{3k}{28})$ est un point de $(E_k) \cap (OA)$ et que pour tout point M de (E_k), on a : $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{OA} = 0$*

3. a- *Déterminer par leurs coordonnées, les points C de la droite (OA) tels que*

$$||\overrightarrow{BC}|| = 4$$

   b- *On considère l'ensemble (Γ) des points P de (E_k) tels que $||\overrightarrow{C_1P}|| = 2\sqrt{5}$ où C_1 est l'un des points C précédemment trouvé*

   ✓ *Démontrer que la distance BP est constante. En déduire la nature de (Γ)*

Problème 33. ***Partie A***

On se propose de déterminer un ensemble de fonctions h définies et dérivables sur $\mathbb{R}$

A cet effet, on pose pour tout réels x : $\varphi(x) = h(x) - x - 4$

✓ *Déterminer les fonctions h sachant que les fonctions φ sont les solutions de l'équation différentielle :*

$$\varphi' - \varphi = 0$$

Partie B

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par $g(x) = e^x - (x+4)$

1. *Étudier les variations de la fonction g*

2. *Soit (C) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$*

   a- *Montrer que (C) admet une asymptote Δ et préciser la position de (C) par rapport à Δ*

   b- *Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_0 telle que $\frac{3}{2} < x_0 < 2$*

   c- *Construire (C) en prenant $2cm$ comme unité sur les axes*

3. *Calculer l'aire $A(\alpha)$ du domaine limité par (C), Δ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$ avec $\alpha < 0$*

   ✓ *Trouver la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$*

4. *Soit g_1 la restriction de g à l'intervalle $I = [0, +\infty[$*

   a- *Démontrer que g_1 admet une fonction réciproque que l'on notera g_1^{-1}*

   b- *Étudier la continuité et la dérivabilité de g_1^{-1}*

Je m'entraîne en Mathématiques

c- *Étudier la variation de* g_1^{-1}

Partie C

Soit f *la fonction définie par* $f(x) = \ln(x+4)$, *où* ln *désigne le symbole du logarithme népérien*

5. *Donner le sens de variation de* f
6. *Soit* (u_n) *la suite numérique définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in IN,\ u_{n+1} = \ln(u_n + 4) \end{cases}$$

a- *Étudier le sens de variation de la suite* u_n

b- *Montrer que la suite* (u_n) *est majorée par* 2

c- *En déduire que cette suite est convergente*

Exercice 57. *On considère dans l'ensemble* C *des nombres complexes, les équations :*

$$(E_1)\ :\ 9z^2 + 6(2-3i)z - 5 - 12i = 0$$

$$(E_2)\ :\ 9z^2 + 6(2-3i)z - 5 - 12i = 3\overline{z} + 2 + 3i$$

où i *est tel que* $i^2 = -1$ *et* $\overline{z}$ *est le conjugué de* z

1. a- *Résoudre l'équation* (E_1)

b- *En déduire que pour tout nombre complexe* z *solution de l'équation* (E_2), *il existe un nombre complexe* $\varphi(z)$ *tel que :*

$$[\varphi(z)]^2 = \overline{\varphi(z)}$$

c- *En posant* $\varphi(z) = T$, *démontrer que* $T = 0$ *ou* $|T| = 1$

✓ *Résoudre l'équation* $T^2 = \overline{T}$

2. *Résoudre l'équation* (E_2)
3. *On donne dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, les points* A, B, C *d'affixe respectives*

$$z_1 = -\frac{1}{3} + i,\ z_2 = -\frac{5}{6} + (1 + \frac{\sqrt{3}}{6})i,\ z_3 = -\frac{5}{6} + (1 - \frac{\sqrt{3}}{6})i$$

a- *Déterminer la nature du triangle* ABC

b- *Déterminer l'affixe du point* D *tel que le quadrilatère* $ABCD$ *soit un losange*

Exercice 58. *Dans l'espace orienté rapporté à un repère orthonormé direct* $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *on considère les points* $A(1, -2, 3)$, $B(2, 0, -3)$, $C(-1, 1, 0), D(3, 1, -2)$

1. *Déterminer le barycentre* G *des points pondérées* $(A, -1)$, $(B, 2)$ *et le barycentre* H *des points pondérées* $(C, 3)$, $(D, 2)$
2. *Démontrer géométriquement que l'ensemble* Γ *des points* M *de l'espace tel que :*

$$(2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) \wedge (3\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}) = \vec{0}$$

est une droite

3. *Déterminer une représentation paramétrique de* Γ
4. *Le point* $I(0, 0, -1)$ *appartient-il à* Γ *?*
5. *Déterminer une équation cartésienne du plan contenant la droite* Γ *et le point* I

Problème 34. ***Partie A***

1. *Soit* m *un paramètre réel*

✓ *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *et discuter suivant les valeurs de* m *l'équation :*

$$|x + 1 - m| + m = 0$$

2. *Préciser suivant les valeurs de* m *l'ensemble de définition* D_m *de la fonction* f_m *de la variable réelle* x *définie par :*

$$f_m(x) = \exp\left(\frac{2(x-m+1)}{|x+1-m|+m}\right)$$

▲ *La notation* $\exp(t)$ *désigne* e^t

3. *On suppose dans cette partie que* m *est strictement positif*

a- *Écrire* $f_m(x)$ *sans le symbole de valeur absolue*

b- *Déterminer la fonction dérivée première de* f_m *sur chacun des intervalles* $]-\infty,\ m-1[$ *et* $]m-1,\ +\infty[$

✓ *Étudier la dérivabilité de* f_m *au point* $m-1$

Je m'entraîne en Mathématiques

⊗ *On pourra étudier la limite de* $f'_m(x)$ *à gauche et à droite au point* $m-1$

c- Dresser le tableau de variation de f_m

Partie B

On prend $m=1$ *et on désigne par* f *la fonction* f_m *correspondante*

4. *a- Étudier la dérivabilité de* f *au point* $x_0=0$
   b- Étudier les variations de la fonction f
5. *a- On désigne par* (C) *la courbe représentative de* f *dans le plan muni d'un repère orthonormé* $R=(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$
   - *Tracer la tangente* Δ *à* (C) *au point d'abscisse* $x_0=0$
6. *L'objectif de cette question est de déterminer la position de* (C) *par rapport à* Δ

   Pour cela, on considère la fonction φ *définie sur* $]-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}[$ *par :*

$$\varphi(x)=\frac{2x}{|x|+1}-\ln(2x+1)$$

   a- A l'aide des variations de φ*, étudier le signe de* $\varphi(x)$
   b- En déduire la position relative de (C) *par rapport à* Δ *pour* x *élément de* $]-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}[$
7. *Construire la courbe* (C)
8. *a- Démontrer que* f *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur un intervalle* E *que l'on précisera*
   ✓ *Déterminer l'expression de* $f^{-1}(x)$ *pour* x *élément de* E
   b- Construire la courbe représentative (C') *de* f^{-1} *dans le même repère que* (C)

Problème 35. ***Partie A***

On considère la famille des nombres complexes Z_m *définie par :*

$$Z_m=[(2m^2+2)x-(m^2+1)y+2m^2+2]+i[(1-m)x^2+(1+m)x+2m-y]$$

1. *Déterminer l'ensemble des points* $M(x,y)$ *du plan complexe pour lesquels* Z_m *est imaginaire pur*
2. *a- Trouver la relation* $R(x,y,m)=0$ *que doit lier* x*,* y *et* m *pour que* Z_m *soit réel*
   b- Cette relation définie une application f_m *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à la variable* x *associe* $y=f_m(x)$*.*
   ✓ *Soit* (T_m) *la courbe représentative de* f_m *dans un repère orthonormé* $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$
   c- Détermine s'ils existent, les points fixes des courbes (T_m)
   d- Étudier suivant les valeurs de m*, le nombre de points d'intersection de* (T_m) *avec l'axe des abscisses*
3. *Calculer les coordonnées* x *et* y *du sommet* S_m *de* (T_m) *lorsque* (T_m) *n'est pas une droite*
   - *Trouver la relation indépendante de* m *qui existe entre ces coordonnées*

Partie B

On considère la fonction numérique g *de la variable réelle* x *définie par :*

$$g(x)=\frac{2(x+1)^2}{2x-1}$$

Soit (Γ) *la courbe représentative de* g *dans le repère* $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$

1. *Déterminer l'asymptote oblique de* (Γ)
2. *Montrer que le point d'intersection des asymptotes est centre de symétrie de* (Γ)
3. *Écrire les équations des tangentes à* (Γ) *au point d'abscisses* $x=-1$ *et* $x=2$
4. *Étudier les variations de* g *et construire* (Γ)
5. *Déterminer l'unité de mesure d'aire pour que l'aire de la portion du plan comprise entre* (Γ)*, son asymptote oblique et les droites d'équations* $x=2$ *et* $x=5$ *soit* $1cm^2$

Exercice 59. *Une urne* A *contient* 14 *boules dont* 8 *vertes et* 6 *rouges et une urne* B *contient* n *boules dont* 6 *vertes et les autres rouges* $(n>6)$

On suppose que les boules sont indiscernables au toucher.

1. *On tire simultanément deux boules de l'urne* A*. Quelle est la probabilité pour qu'elles soient de couleurs différentes ?*

Je m'entraîne en Mathématiques

2. *On effectue cinq fois le tirage précédent, avec remise des boules avant chaque nouveau tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir pour la première fois deux boules de même couleur au troisième tirage ?*

3. *Un joueur tire maintenant une boule de A et une boule de B. S'il tire deux boules vertes, il gagne $50F$. S'il tire deux boules rouges, il gagne $20F$. S'il tire deux boules de couleurs différentes, il perd $30F$. Soit X la variable aléatoire associé au gain algébrique du joueur.*

   a- *Donner la loi de probabilité de X*

   b- *Déterminer la valeur de n pour que l'espérance mathématique de X soit nulle*

Exercice 60. *Étant donné deux paramètres réels a et b, on considère dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$ un point $A(a,1)$ et un point $B(0,b)$*

On suppose que les points A et B varient de manière que la segment $[AB]$ conserve une longueur constante l

1. *Démontrer que le milieu I du segment $[AB]$ varie sur une courbe que l'on précisera*

2. *Soit M un point quelconque de $[AB]$ distinct de A et tel que $AM = k$ avec $0 < k < \frac{1}{2}$*

   a- *Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$. En déduire les coordonnées du point M en fonction de celles de A*

   b- *Démontrer que lorsque A et B varient, k et l restant constant, le point M appartient à une conique dont on précisera les sommets, les foyers et les directrices*

Exercice 61. *Soit m un paramètre réel et f_m la fonction définie par :*

$$f_m(x) = \ln(x^2 - (m+3)x + 3m + 1)$$

Soit (C_m) la courbe représentative de f_m dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$

1. *Trouver le domaine de définition de f_m suivant les valeurs de m*

2. a- *Montrer qu'il existe un point et un seul (que l'on désignera par A) communs à toutes les courbes (C_m)*

   b- *Montrer que si M est un point du plan distinct de A, il existe au plus une valeur de m pour laquelle (C_m) passe par M*

3. *Discuter suivant les valeurs de réel m le nombre de points d'intersection de (C_m) avec l'axe des abscisses.*

✓ *On donnera les coordonnées de ces points en fonction de m*

Exercice 62. *On jette un dé pipé dont les six faces portent respectivement les numéros $1, 2, 3, 4, 5, 6$*

On appelle Ω l'univers $\{1,2,3,4,5,6\}$ et p_i la probabilité de l'événement $\{i\}$

Le dé est tel que $6p_1 = 2p_2 = 3p_3 = 2p_4 = 3p_5 = 2p_6$

1. *Déterminer la probabilité de chacun des événements élémentaires*

2. *Soit X la variable aléatoire définie par :*

$$\begin{cases} X(6) = X(4) = X(2) = 2 \\ X(5) = X(3) = -3 \\ X(1) = k, \quad k \text{ un nombre reel} \end{cases}$$

   Calculer suivant les valeurs de k, la probabilité de chacun des événements suivants

$$\{X = 2\},\ \{X = -3\},\ \{X = k\}$$

3. *Déterminer la valeur de k pour laquelle l'espérance mathématique est nulle*

✓ *Tracer alors la fonction de répartition de X puis calculer sa variance*

Exercice 63. *Un sac contient 10 jetons.*

3 portent le chiffre 1, 5 portent le chiffre 2 et 2 portent le chiffre 3

On tire simultanément deux jetons du sac, les tirages sont supposés équiprobables

On désigne par X la somme des chiffres marqués sur les jetons

1. *Quelles sont les valeurs possibles de X ?*

Je m'entraîne en Mathématiques

2. *Quelle est la loi de probabilité de X ?*

3. *On appelle A l'événement "La somme des chiffres est strictement supérieur à 4"*

   • *Calculer la probabilité de A*

4. *On fait 4 fois de suite le tirage en remettant à chaque fois les jetons dans le sac*

• *Quelle est la probabilité pour que l'événement A se réalise exactement 3 fois ? Au moins 3 fois ?*

Exercice 64. *Un sac contient 3 boules blanches, 6 boules et 5 vertes indiscernables au toucher.*

On tire simultanément deux boules du sac

1. *Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge et une boule verte ?*

2. *Trouver la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes*

3. *On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issu du tirage*

   a- *Déterminer la loi de probabilité de X*

   b- *Calculer l'espérance mathématique et la variance de X*

Problème 36. ***Partie A***

On considère la famille (C_m) des courbes d'équation $y = f_m(x) = \varepsilon\sqrt{mx^2 - 2mx + 1}$ où m est un paramètre réel et ε le nombre valant 1 ou -1

1. *Déterminer, s'ils existent, les points fixes de cette famille de courbes*

2. *Montrer que ces points sont deux à deux symétrique par rapport à l'axe des abscisses*

3. *Donner la nature de la figure formée par ces points*

4. a- *Donner l'équation cartésienne du cercle circonscrit à cette figure*

   b- *Ce cercle est-il une courbe de la famille ?*

Partie B

♠ *On suppose dans cette partie que $m = -1$*

5. *Démontrer que la tangente en un point quelconque M de (C_{-1}) est orthogonale à la droite (ωM) où ω est le point de coordonnées $(1, 0)$*

6. *Montrer que les points $P(1 - \sqrt{2}, 0)$ et $Q(1 + \sqrt{2}, 0)$ sont des points de (C_{-1}) et que pour tout point M de (C_{-1}) différent de P et Q le triangle PMQ est rectangle*

✓ *On prend maintenant $\varepsilon = 1$*

7. a- *Démontrer que f_{-1} est une bijection de $[1 - \sqrt{2},\ 1]$ sur un intervalle J que l'on précisera*

   b- *Démontrer que f_{-1} est une bijection de $[1,\ 1 + \sqrt{2}]$ sur un intervalle J' que l'on précisera*

   c- *On désigne par g la réciproque de f_{-1}*

      • *Donner l'expression de $g(x)$ sur chacun des intervalles trouvés*

8. *Si (Γ) désigne la courbe représentative de g, trouver les points communs à (C_{-1}) et (Γ)*

9. *Tracer au compas les courbes (C_{-1}) et (Γ) dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$*

10. *Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_{-1})*

    ⊗ *Pour ce faire, on procédera à un changement de variable approprié*

Problème 37. *On désigne par g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$g(t) = \frac{e^t}{1 + e^{2t}}$$

On se propose d'étudier g et de trouver une de ses primitives

Partie A : Étude d'une fonction G définie par une intégrale

1. a- *Démontrer que g est une fonction paire*

   b- *Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition*

   c- *Étudier le sens de variation de g*

      • *Dresser le tableau des variations de g*

   d- *Tracer (Γ) la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$. On prendra 4cm pour unité et $e \simeq 2,7$*

Je m'entraîne en Mathématiques

2. *On considère la fonction numérique G définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$$

▲ *On ne cherchera par à exprimer $G(x)$ en fonction de x*

a- *Que représente G pour la fonction g ?*

b- *Préciser $G'(x)$ et déduire le sens de variation de G*

c- *Déterminer le signe de $G(x)$ suivant les valeurs de x*

Partie B : Étude d'une bijection f et de sa réciproque

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ par :

$$f(x) = \ln\left[\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

1. a- *Démontrer que si $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ alors $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \in]0, +\infty[$*

b- *Démontrer que f est une fonction impaire*

c- *Démontrer que :*

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[, \qquad f'(x) = \frac{1+\tan^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Préciser le nombre dérivée de f en 0

d- *Étudier la limite à droite de f en $-\frac{\pi}{4}$, ainsi que la limite à gauche de f en $\frac{\pi}{4}$*

e- *Dresser le tableau des variations de f*

f- *tracer (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O', \vec{i}, \vec{j})$. Unité 4cm*

2. a- *Démontrer que f admet une bijection réciproque que l'on notera f^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble image*

b- *Préciser les limites de f^{-1} aux bornes de son ensemble de définition*

- *Préciser le nombre dérivée de f^{-1} en 0*
- *Dresser le tableau de variation de f^{-1}*
- *Tracer sa courbe représentative (C') dans le même repère que (C)*

c- *Démontrer que si $x \in IR$ et $y \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, on a :*

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow e^x = \tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$$

d- *En déduire que $\left(f^{-1}\right)' = G'$ et démontrer que $f^{-1} = G$*

Exercice 65. *On pose :*

$$\forall x \in IN^*, \qquad U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,dx$$

1. a- *Démontrer que U_n est défini pour tout entier naturel non nul n*

b- *Démontrer que : $\forall n \in IN^*, \quad U_n \geq 0$*

2. a- *Étudier le sens de variation de la suite $(U_n)_{n\in IN^*}$*

b- *En déduire le sens de variation de la suite $(U_n)_{n\in IN^*}$*

3. *On pose $\forall x \in IN^*, \qquad V_n = \int_0^1 x^n\,dx$*

a- *Démontrer que la suite $(V_n)_{n\in IN^*}$ est convergente et calculer sa limite*

b- *En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in IN^*}$*

Problème 38. • *Un tableau de valeurs est donné en fin d'énoncé*

• *Toutes les fonctions considérées dans ce problème sont dérivables sur leur ensemble de définition*

Partie A

On considère la onction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. (unité 3cm)

1. a- *Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et préciser les asymptotes éventuelles à (C) parallèles aux axes*

b- *Étudier le sens de variation de la fonction f et donner son tableau de variation*

c- *Tracer (C)*

2. *u est un réel strictement positif. En utilisant une intégration par parties, déterminer l'aire $A(u)$ de la région du plan comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = u$*

Je m'entraîne en Mathématiques

3. *Calculer*

$$\lim_{u\to+\infty} A(u)$$

▲ *Dans la suite du problème n désigne un entier naturel non nul*

Partie B

On considère les onctions f_n définies dans $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{1-x}$$

1. a- *Déterminer les limites de f_2 en $-\infty$ et en $+\infty$*
   b- *Étudier le sens de variation de f_2 et dresser son tableau de variation*
   c- *Construire la représentation graphique (C_2) de f_2 dans le même repère que (C)*

2. a- *Déterminer les limites de f_3 en $-\infty$ et en $+\infty$*
   b- *Étudier le sens de variation de f_3 et dresser son tableau de variation*
   c- *Construire la représentation graphique (C_3) de f_3 dans le même repère que (C)*

3. a- *Étudier suivant la parité de n, le sens de variation de la fonction f_n et donner ses limites aux bornes de son ensemble de définition*
   b- *Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $f'_n = f_{n-1} - f_n$*

Partie C

On considère les fonctions J_n définies dans $\mathbb{R}$ par :

$$J_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$$

1. *En utilisant la relation de la question **B 3. b-**, calculer $J_n(x) - J_{n-1}(x)$ pour tout réel x*

2. *Démontrer que pour tout réel x, on a :*

$$J_n(x) = J_1(x) - \sum_{k=2}^{n} f_k(x)$$

- *En déduire que :*

$$J_n(x) = e - e^{1-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{n!}$$

3. *Dans cette question, on suppose que x est élément de $[0,\ 1]$*
   a- *Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $0 \leq f_n(x) \leq f_n(1)$*
   b- *En déduire que pour tout x élément de $[0,\ 1]$, $J_n(x) \leq \frac{1}{n!}$*
   c- *Calculer la limite de $J_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$*
   d- *Démontrer que pour tout x élément de $[0,\ 1]$,*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$$

Partie D

1. *On suppose n pair*

   Étudier les sens de variation de J_n sur $\mathbb{R}$. Préciser les limites de $J_n(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ et $+\infty$

   Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $J_n(x) = e$

2. *On suppose n impair*

   Étudier les sens de variation de J_n sur $\mathbb{R}$. Préciser les limites de $J_n(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ et $+\infty$

   Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $J_n(x) = e$

   Préciser le signe de chaque solution

3. *Déterminer suivant la parité de n, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :*

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right) = 0$$

- *On ne calculera pas les solutions*

✓ *Tableau des valeurs*

x	-3	-2	-1	1	$\frac{3}{2}$	2
e^x	$0,05$	$0,13$	$0,37$	$2,72$	$4,48$	$7,39$

Je m'entraîne en Mathématiques

Exercice 66. *On considère les intégrales I_n et J_n définies par :*

$$I_n = \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)}\,dx & si\ n = 0 \\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin(x))^n}{\cos(x)} & si\ n \in IN^* \end{cases}$$

et

$$J_n = \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(x)\,dx & si\ n = 0 \\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin(x))^n \cos(x) & si\ n \in IN^* \end{cases}$$

1. a- *Calculer J_0 et J_n pour tout entier naturel non nul*

   b- *Calculer $I_2 - I_0$ et démontrer que pour tout entier naturel n,*

$$I_{n+2} - I_n = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

2. a- *Calculer I_1*

   b- *En déduire I_3*

3. *Soit f la fonction définie sur $\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$ par*

$$f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

   a- *Démontrer que pour tout réel x,*

$$\cos(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

   b- *On pose pour tout x élément de $\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$:*

$$u(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

   ✓ *Calculer $\frac{u'(x)}{u(x)}$. En déduire une primitive de f sur $\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$*

   c- *Calculer I_0 puis I_2 et I_4*

Problème 39. *Le but du problème est d'étudier la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1}\ln(x) & si\ x \in]0,\ 1[\cup]1,\ +\infty[\\ 0 & si\ x = 0 \\ 1 & si\ x = 1 \end{cases}$$

On notera (C) la courbe représentative de f relativement à un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$

On prendra 5cm pour unité

Partie A

On considère la fonction g dérivable sur $]0,\ +\infty[$ par

$$g(x) = (x-2)\ln(x) + (x-1)$$

1. *Démontrer que pour tout réel x élément de $]0,\ +\infty[$,*

$$g'(x) = \frac{2(x-1)}{x} + \ln(x)$$

2. *Étudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation*

3. *Déduire de **2.** que $g(x)$ est positif pour tout réel x de $]0,\ +\infty[$*

Partie B

1. a- *Calculer*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

   b- *Démontrer que f est continue à droite en 0 et continue en 1*

   c- *Calculer le nombre dérivée de f à droite en 0*

   d- *Donner une interprétation géométrique de ce résultat*

   e- *On admettra ici que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = \frac{3}{2}$*

   f- *En déduire une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1*

Je m'entraîne en Mathématiques

2. *a- On admet que f est dérivable sur $]0,\ 1[$ et sur $]1,\ +\infty[$*

✓ *Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]0,\ 1[\cup]1,\ +\infty[$,*

$$f'(x) = \frac{x}{(x-1)^2} g(x)$$

b- En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation

c- Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0,\ 1]$, on a : $0 \leq f(x) \leq 1$

d- Dans le repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$, tracer la demi-tangente à (C) au point O, la tangente à (C) au point B de coordonnées $(1,\ 1)$ et la courbe (C)

- *On donne* $\ln(2) \simeq 0,69 \qquad \ln(3) \simeq 1,1$

Partie C

1. *Pour tout réel α appartenant à $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, on considère l'intégrale $A(\alpha)$ telle que :*

$$A(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} \frac{t^2}{t-1} \ln(t)\, dt$$

On note A la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures

✓ *Que représente géométriquement le nombre A ?*

2. *a- Démontrer que la fonction H_n définie, pour tout entier naturel non nul n sur $]0,\ +\infty[$*

$$H_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}\left(\ln(t) - \frac{1}{n+1}\right)$$

est une primitive de la fonction $t \longmapsto t^n \ln(t)$ sur $]0,\ +\infty[$

b- Soit α dans $]0,\ \frac{1}{2}[$. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n \ln(t)\, dt \qquad \text{et} \qquad I_n = \lim_{\alpha \to \frac{1}{2}^-} I_n(\alpha)$$

✓ *Calculer $I_n(\alpha)$ et en déduire que $I_n(\alpha)$ et en déduire que*

$$I_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

3. *a- Pour tout réel t différent de 1 et pour tout entier naturel non nul n,*

calculer la somme :

$$t^2 + t^3 + ... + t^{n+1}$$

✓ *Somme des n premiers termes d'une suite géométrique*

- *Démontrer que :*

$$\frac{t^2}{t-1} = -t^2 - t^3 - ... - t^{n+1} + \frac{t^{n+2}}{t-1}$$

et que

$$A(\alpha) = -I_2(\alpha) - I_3(\alpha) - ... - I_{n+1}(\alpha) + \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n f(t)\, dt$$

*b- En utilisant la question **2. c-** de la partie **B**, démontrer que :*

$$0 \leq \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n f(t)\, dt \leq \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} t^n\, dt \leq \int_0^1 t^n\, dt$$

c- Déduire de ce qui précède que pour tout entier naturel non nul n :

$$0 \leq A(\alpha) + I_2(\alpha) + I_3(\alpha) + - ... + I_{n+1}(\alpha) \leq \frac{1}{n+1}$$

et que pour tout entier naturel non nul n :

$$0 \leq A - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{(n+2)^2}\right) \leq \frac{1}{n+1}$$

d- On admet que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{(n+2)^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

✓ *Démontrer que :*

$$A = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$$

Exercice 67. *Soit a un réel non nul. On considère la suite (u_n) définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in IN^*, \qquad a u_{n+1} = (a+1)u_n - u_{n-1} \end{cases}$$

Je m'entraîne en Mathématiques

1. *Pour quelle valeur de a la suite (u_n) est-elle arithmétique ?*

✓ *Dans la suite de l'exercice, on supposera le réel a différent de 1*

2. *Démontrer que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par :*

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison

3. a- *Démontrer que pour tout entier naturel non nul, on a :*

$$u_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$$

b- *Pour tout entier naturel n, calculer u_n en fonction de n et de a*

c *Pour quelles valeurs de a, la suite (u_n) est-elle convergente ?*

✓ *Préciser alors la limite de (u_n) en fonction de a*

4. *On choisit $a = 2$ Trouver le plus petit entier naturel p tel que :*

$$|u_p - 2| < 10^{-3}$$

• *On donne :* $\ln(2) = 0,69$ *et* $\ln(5) = 1.61$

Problème 40. *Ce problème comporte 3 parties A, B et C. Les parties B et C sont indépendantes*

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$. L'unité mesurant $1cm$

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0,\ +\infty[$ par $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 4$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$

1. a- *Démontrer que f est continue à droite en 0*

b- *Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0*
En déduire une interpretation géométrique

2. a- *Déterminer la limite de f en $+\infty$*

b- *Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation*

c- *Tracer (C)*

3. a- *Soit g la restriction de f à $[4,\ +\infty[$*

✓ *Démontrer que g est une bijection de $[4,\ +\infty[$ sur $[0,\ +\infty[$ et que son application*

réciproque g^{-1} est définie sur $[0,\ +\infty[$ par $g^{-1}(x) = x + 4\sqrt{x} + 4$

b- *Tracer la courbe représentative (C') de g^{-1} dans le même repère que (C)*

✓ *On appellera (H) la courbe $(C) \cup (C')$*

4. *Soit (E) la courbe d'équation : $x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0$ dans le repère $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$*

a- *Démontrer que pour tout réels x et y positifs, on a :*

$$x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0 \Leftrightarrow [y - f(x)][y - g^{-1}(x)] = 0$$

• *En déduire que : $(H) = (E)$*

b- *Démontrer qu'un point $M(a,\ b)$ est un point de (E) si, et seulement si, le point $M'(b,\ a)$ est aussi un point de (E)*

• *En déduire que la courbe (E) admet un axe de symétrie. Préciser cet axe !!*

5. *Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$*

Partie B

1. *Soit m un réel appartenant à $]-2,\ 2[$*

a- *Soit les points A_m de coordonnées $(2+m,\ 0)$ et B_m de coordonnées $(0,\ 2-m)$*

✓ *Écrire une équation de la droite (D_m) passant par les points A_m et B_m*

b- *Soit (Δ_m) la droite d'équation : $x - y - 2m = 0$*

• *Démontrer que le point d'intersection T_m des droites (D_m) et (Δ_m) a pour coordonnées*

$$\left(\frac{1}{4}(2+m)^2,\ \frac{1}{4}(2-m)^2\right)$$

c- *Démontrer que (D_m) est tangent à (C) en T_m*

2. a- *Soit H_m le projeté orthogonal de T_m sur la droite (δ) d'équation $y = -x$*

• *Démontrer que H_m à pour coordonnées $(m,\ -m)$*

Je m'entraîne en Mathématiques

b- *Soit F le point de coordonnées $(2,\ 2)$*

✓ *Démontrer que le quadrilatère $A_mH_mB_mF$ est un carré pour tout m élément de $]-2,\ 2[$*

3. *Pour $m=\frac{1}{2}$, placer le point T_m, tracer les droites (D_m) et (Δ_m) et le carré $A_mH_mB_mF$*

Partie C

1. *Soit M un point du plan d'affixe z*

a- *Démontrer que le point H d'affixe $\frac{z-i\bar{z}}{2}$ est le projeté orthogonal de M sur (δ)*

b- *Démontrer que la distance de M à (δ) est égale à : $|\frac{z+i\bar{z}}{2}|$*

2. a- *Démontrer que l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|\frac{z+i\bar{z}}{2}| = |z-(2+2i)|$ est la courbe (E)*

b- *Interpreter géométriquement ce résultat*

Exercice 68. *Les questions 1 et 2 sont indépendantes*

On considère dans le plan un triangle ABC rectangle en A tel que $AB=2a$ et $AC=a$ où a est un nombre réel strictement positif donné

1. a- *Déterminer et construire le barycentre G des points pondérées $(A,1),\ (B,-1),\ (C,1)$*

b- *Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que :*

$$||\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|| = ||\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}||$$

2. *Soit H le point défini par :*

$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

a- *Démontrer que H est le barycentre des points pondérées $(A,3),\ (B,1),\ (C,-1)$*

- *Pour tout réel k, on désigne par E_k l'ensemble des points M du plan tels que :*

$$3MA^2+MB^2-2MC^2=ka^2$$

✓ *Pour quelle valeur de k, E_k contient-il le point C ?*

c- *Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :*

$$3MA^2+MB^2-2MC^2=8a^2$$

Exercice 69. *Soit h la fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ par :*

$$h(x)=\ln(x)-\frac{x}{e}$$

- *Calculer $h'(x)$ sur $]0,+\infty[$*
- *Étudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation*
- *Démontrer que :*

$$\forall x\in[1,\ e] \quad 0\leq \ln(x)\leq \frac{x}{e} \qquad (*)$$

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n=\int_1^e x\,(\ln(x))^n\,dx$$

- *A l'aide deux intégrations par parties, calculer I_2*
- *Démontrer que la suite (I_n) est décroissante*
- *Démontrer que la suite (I_n) est convergente*
- *En utilisant la relation $(*)$, démontrer que :*

$$\forall n\in IN,\quad I_n\leq \frac{e^2}{n+2}-\frac{e^2}{(n+2)e^n}$$

- *En déduire la limite de la suite (I_n)*

Exercice 70.

1. *Trouver suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 4^n par 7*
2. *Justifier que : $1999\equiv 4[7]$*
3. *En déduire le reste de la division euclidienne par 7 de 1999^{132}*
4. *Soit l'entier A_k tel que : $A_k=123^k+123^{2k}+123^{3k}+123^{4k}+123^{5k}$*

✓ *Discuter suivant les valeurs de l'entier naturel k, le reste de la division euclidienne de A_k par 7*

Je m'entraîne en Mathématiques

Exercice 71. *Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé$(O;\ I,\ J)$*

On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C tells que :

$$z_A = -3,\ z_B = 2+2i \text{ et } z_C = 7i$$

1. *Construire le triangle ABC*
2. *Vérifier que les complexes $z_A - z_B$ et $z_C - z_B$ ont le même module que l'on précisera*
   - *a- Écrire le nombre complexe $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ sous forme trigonométrique*
   - *b- En déduire que ABC est un triangle rectangle isocèle en B*
3. *Soit S la similitude directe de centre A qui applique B sur C*
   - *a- Déterminer l'angle et le rapport de S*
4. *Construire après justification, les points E et F images respectives de C et E par la similitude S*
   (On ne demande pas les coordonnées ni les affixes de ces points)
5. *On pose :*

   $A_0 = S(A),\ A_1 = B,\ A_2 = S(B),\ A_3 = S(C),\ A_4 = S(E),\ A_5 = S(F),\ A_6 = S(A_5),\ \ldots$

   Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $A_n = S(A_{n-1})$ et pour tout entier naturel n, $R_n = |z_{A_{n+1}} - z_{A_n}|$
   - *a- Calculer $|z_{A_2} - z_{A_0}|$ et R_2*
   - *b- En déduire la nature précise du triangle AA_2A_3*
6. *Démontrer que, pour tout entier naturel n, AA_nA_{n+1} est isocèle rectangle en A*
7. *Démontrer que la suite (R_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$*
8. *Démontrer que :*

$$\forall n \in IN,\quad R_n = 2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{29}$$

Problème 41.

Partie A

Cette partie propose l'étude des intégrales I_n définies par :

$$\forall n \in IN^*,\quad I_n = \int_0^1 (1-x^n)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

On pose

$$J_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \qquad et \qquad \forall n \in IN^*,\quad J_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$$

1. *En utilisant une considération d'aire, justifier que :*

$$J_0 = \frac{\pi}{4}$$

2. *Calculer J_1*
   - *a- Calculer J_1. En déduire la valeur de I_1*
   - ✓ *Donner une interpretation géométrique du résultat trouver*
3. *Étudier le sens de variation de la suite $(J_n)_{n\in IN^*}$*
4. *En déduire que les suites $(I_n)_{n\in IN^*}$ et $(J_n)_{n\in IN^*}$ convergent*
5. *Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :*

$$0 \le J_n \le \int_0^1 x^n\,dx$$

6. *En déduire*

$$\lim_{n\to+\infty} J_n \qquad puis \qquad \lim_{n\to+\infty} I_n$$

Partie B

On se propose dans cette partie de déterminer la valeur exacte de J_n en fonction de n

Soit v la fonction définie sur $[0,\ 1]$ par

$$v(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$$

et soit v' sa fonction dérivée sur $[0,\ 1]$

7. *Démontrer que $v'(x) = x\sqrt{1-x^2}$*
8. *A l'aide d'une intégration par parties faisant intervenir v, démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a :*

$$(n+2)J_n = (n-1)J_{n-2}$$

Je m'entraîne en Mathématiques

✓ *Vérifier que cela reste vrai pour* $n = 2$

9. *Démontrer que pour tout entier naturel non nul* p, *on a :*

$$J_{2p} = \frac{1 \times 3 \times ... \times (2p-1)}{4 \times 6 \times ... \times (2p+2)} \times \frac{\pi}{4} \quad et \quad J_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times ... \times (2p)}{3 \times 5 \times ... \times (2p+3)}$$

Exercice 72. *On considère la suite* (J_n) *définie par :*

$$\forall n \in IN, \quad J_n = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \, dt$$

1. *Démontrer que pour tout nombre entier naturel* n *:*

   a- J_n est positif si n est pair

   b- J_n est négatif si n est impair

2. *Démontrer que :*

$$\forall n \in IN, \quad J_n = 2\int_{0}^{1} (t^2-1)^n \, dt$$

✓ *Calculer* J_0, J_1 *et* J_2

3. *A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :*

$$\forall n \in IN^*, \quad J_n = -\frac{2n}{1+2n} J_{n-1}$$

- *Retrouver* J_1 *et* J_2 *connaissant* J_0

4. *Démontrer que*

$$\forall n \in IN^*, \quad J_n = \frac{(-1)^n \times n! \times 2^{n+1}}{3 \times 5 \times 7 \times ... \times (2n+1)}$$

Problème 42. ***Partie A***

On se propose de déterminer l'ensemble I *des fonctions numériques* f *d'une variable réelle définies sur* $]-1,+\infty[$, *dérivables sur cet intervalle et vérifiant la relation suivante :*

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad (1+x)f'(x) + f(x) = 1 + \ln(1+x)$$

Soit f *un élément de* I *et soit* g *la fonction dérivable sur* $]-1,+\infty[$ *par :*

$$g(x) = (1+x)f(x)$$

1. *Démontrer que* g *est une primitive sur* $]-1,+\infty[$ *de la fonction* h *définie par :*

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad h(x) = 1 + \ln(1+x)$$

Réciproquement soit g_1 *une primitive de la fonction* h.

2. *Démontrer que la fonction* f_1 *définie par :*

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f_1(x) = \frac{g_1(x)}{1+x}$$

est élément de I

3. *Déterminer les réels* a *et* b *tels que :*

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad \frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$$

A l'aide d'une intégration par parties,

a- déterminer l'ensemble des primitives h *sur* $]-1,+\infty[$

b- En déduire l'ensemble I

Partie B

On considère l'ensemble des fonctions f_k *dérivables sur* $]-1,+\infty[$ *et définies sur cet intervalle par :*

$$f_k(x) = \ln(x+1) + \frac{k}{x+1}$$

k *étant un paramètre réel*

1. *Calculer suivant les valeurs de* k, *la limite de* f_k *en* $+\infty$ *et à droite en* -1

2. *Étudier suivant les valeurs de* f_k, *le sens de variation de* f_k *et dresser son tableau de variation*

3. *Tracer avec soin, dans un même repère* $(O; \vec{i}, \vec{j})$ *les représentation graphiques respectives* (C_{-1}), (C_0) *et* (C_1) *des fonctions* f_{-1}, f_0 *et* f_1

- *Pour tout réel* t *et pour tout entier naturel supérieur ou égal à* 2, *on pose :*

$$Q_{n-2}(t) = 1 - t + t^2 + ... + (-1)^{n-2}t^{n-2}$$

4. *Démontrer que :*

$$\forall t \in IR - \{-1\}, \quad Q_{n-2}(t) = \frac{1-(-1)^{n-1}t^{n-1}}{1+t}$$

Je m'entraîne en Mathématiques

5. *En déduire que :*

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + ... + (-1)^{n-2}t^{n-2} + (-1)^{n-1}\left(\frac{t^{n-1}}{1+t}\right) \quad , t \neq -1$$

6. *A l'aide d'une intégration par parties sur* $[0, x]$, $(0 \leq x \leq 1)$ *démontrer que :*

$$f_0(x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt \qquad avec \quad P_{n-1}(x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}$$

7. *On considère la fonction* φ *définie sur* $[0,\ 1]$ *par :*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ \\ \frac{f_0(x)}{x} & si\ x \in]0,\ 1] \end{cases}$$

a- Démontrer que :

$$\forall x \in [0,\ 1], \quad \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt \leq \int_0^x t^{n-1}\,dt$$

b- En déduire que :

$$\forall x \in [0,\ 1], \quad \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,dt \leq \frac{1}{n}$$

c- En utilisant ***6.****, démontrer que :*

$$\forall x \in]0,\ 1], \quad -\frac{1}{nx} \leq \varphi(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x} \leq \frac{1}{nx}$$

8. *Par intégration sur* $\left[\frac{1}{n},\ 1\right]$, *démontrer que :*

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 \varphi(x)\,dx + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n(1) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \varphi(x)\,dx - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) + S_n\left(\frac{1}{n}\right)$$

avec

$$S_n(x) = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + ... + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)^2}, \quad n \geq 2$$

Partie C

Soit

$$g_n(x) = \sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^i x^i = 1 - x + x^2 - x^3 + ... - x^{2n-1}$$

1. *Démontrer par récurrence que :*

$$\forall n \in IN^*,\ \forall x \in]-1, +\infty[, \quad f_0'(x) = g_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x}$$

2. *Démontrer que*

$$\forall n \in IN,\ \forall x \in [0,\ 1], \quad \frac{x^{2n}}{1+x} \leq x^{2n}$$

✓ *En déduire que :*

$$\forall n \in IN^*,\ \forall x \in [0,\ 1], \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx \leq \frac{1}{2n+1}$$

• *On considère la suite* (u_n) *définie par :*

$$\forall n \in IN^*, \quad u_n = \sum_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^{i+1}}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{2n}$$

3. *Démontrer que :*

$$\forall n \in IN^*, \quad f_0(1) = u_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx$$

✓ *Étudier la limite de la suite* (u_n)

Exercice 73. *On munit le plan d'un repère orthonormé* $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$

On considère l'application f *définie par les formules analytiques :*

$$\begin{cases} x' &= 2x + 3y \\ \\ y' &= 3x + 10y \end{cases}$$

1. *Déterminer l'ensemble* (D) *des points invariants par* f

2. *a- Pour tout* M *d'image* M' *par* f, *démontrer que le vecteur* $\overrightarrow{MM'}$ *s'il n'est pas nul, est colinéaire à un vecteur fixe* $\vec{u}$

b- Soit H *le projeté de* M *sur* (D) *suivant la direction de* $\vec{u}$

✓ *Démontrer qu'il existe un nombre réel* k *tel que :* $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$

Je m'entraîne en Mathématiques

✓ *En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f*

Exercice 74. *Soit ξ un plan affine rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$*

On considère l'application f de ξ dans ξ qui à tout point $M(x,y)$ fait correspondante le point $M'(x',y')$ définie par :

$$\begin{cases} x' &= \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + m \\ y' &= \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel

1. *Démontrer que f est un antidéplacement*
2. *Pour quelle valeur de m l'application f est-elle une symétrie orthogonale par rapport à une droite affine de ξ ?*
3. *On suppose $m = 0$*

   Trouver une droite (D) et un vecteur $\vec{v}$ tels que $\vec{v}$ appartienne à la direction de

   (D) et que $f = S_{(D)} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ S_{(D)}$ où $S_{(D)}$ est la symétrie orthogonale par rapport à

   (D) et $t_{\vec{v}}$ la translation du vecteur $\vec{v}$

Exercice 75. *Un sac contient 6 boules numérotées de 0 à 5*

On en extrait deux boules qui portent respectivement les numéros x et y. A chaque tirage, on associe la variable aléatoire X définie de la façon suivante :

- *Si x et y sont pairs, X prend la valeur $\frac{x+y}{2}$*
- *Si x et y son impairs, X prend la valeur $\frac{|x-y|}{2}$*
- *Si x et y sont de parités différentes, on attribut à X la valeur 0*

1. *Établir la loi de probabilité de X*
2. *Représenter la fonction de répartition F de X*
3. *Calculer l'espérance mathématique de X*
4. *On extrait dix fois de suite deux boules simultanément avec remise des deux boules après chaque tirage*

   ✓ *Quelle est la probabilité d'obtenir sept fois x et y de même parité ?*

Exercice 76. *Dans un lycée agricole, 65% des élèves font la machinisme agricole et 35% font l'élevage*

D'autre part, on constate que 65% des élèves qui font la machinisme s'intéressent à la théorie et que 20% des élèves qui font l'élevage ne s'intéressent pas à la théorie.

On prend au hasard u élève du lycée et on désigne par M l'événement

- *"L'élève pris fait le machinisme "*

et T l'événement

- *"L'élève pris s'intéressent à la théorie "*

1. *Construire un arbre pondéré décrivant la situation*
2. *a- Calculer $p(M \cap T)$, $p(M \cap \overline{T})$, $p(\overline{M} \cap T)$ et $p(\overline{M} \cap \overline{T})$*

   b- En déduire que $p(T) = 0,7025$
3. *On prend au hasard cinq élèves de ce lycée et on désigne par X la variable aléatoire réelle correspondant au nombre d'élèves qui s'intéressent à la théorie*

   a- Déterminer la loi de probabilité de X

   b- Calculer l'espérance mathématique et la variance de X

Exercice 77. *Un établissement scolaire dispose de 3 classes de terminales A, B et C de même effectif*

Il y a 20% de filles en A, 40% de filles en B, 60% de filles en C

1. *On choisi au hasard un élève dans chacune de ces classes et on désigne par X la variable aléatoire réelle prenant pour valeur le nombre de filles obtenues*

   a- Définir la loi de probabilité de X

   b- Déterminer l'espérance mathématique et l'écart type de X
2. *On réunit tous les élèves des trois classes A, B, C dans la cours de l'établissement et on choisit un élève au hasard parmi eux*

   - *Calculer la probabilité des événements suivants :*

Je m'entraîne en Mathématiques

E "L'élève choisi est de la terminale A "
F "L'élève choisi est une fille "

Exercice 78. *Une urne contient n boules blanches, $n \in IN^*$, deux boules noires et trois boules rouges*

On extrait simultanément deux boules de l'urne. On suppose que les tirages sont équiprobables

1. *Déterminer les probabilités des événements suivants :*

   A: "Obtenir deux boules noires "

   B: "Obtenir aucune boule blanche "

   C: "Obtenir deux boules de couleurs différentes "

2. *Déterminer n pour que la probabilité de l'événement B soit égale à $\frac{2}{11}$*

3. *On suppose dans la suite de l'exercice que $n = 5$*

   On considère alors le jeu suivant :

   Le tirage d'une boule noire rapporte 7 points, le tirage d'une boule rouge rapporte 2 poins, le tirage d'une boule blanche enlève 2 points

   On désigne par X la variable aléatoire réelle qui, à tout tirage de deux boules, associe le nombre de points marqués

   a- *Déterminer l'univers image de X*

   b- *Déterminer la loi de probabilité de X*

   c- *Construire sa fonction de répartition F. Calculer $F(\sqrt{2})$, $F(2^{10})$ et $F(1-\sqrt{3})$*

   d- *Calculer l'espérance mathématique $E(X)$*

Exercice 79. *ABCD est un trapèze non rectangle tel que la droite (AB) est parallèle à la droite (CD)*

On désigne par I, J, O les milieux respectifs de [AB], [CD] et [IJ]

1. *Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que :*

$$||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|| = ||\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}||$$

✓ *Les médiatrices des côtés [AD] et [BC] se coupent en G*

2. *Démontrer que : $GA^2 + BG^2 = GC^2 + GD^2$*

3. *Soit (E_2) l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$*

   a- *Justifier que (E_2) est non vide*

   b- *Démontrer que : $M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OM} = k$ où k est une constante réelle*

   c- *En déduire que : $M \in (E_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{GM} = 0$*

4. *Déterminer et construire (E_2)*

Problème 43. *Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$*

Partie A

On désigne par M_0 l'origine O du repère et par M_1 le point tel que : $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{i}$

On fixe un nombre réel $r > 0$ et un réel θ dans $\mathbb{R} - \{k\pi, \quad k \in Z\}$

Soit M_2 le point du plan tel que :

$$\begin{cases} \left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| = r\left\|\overrightarrow{M_0M_1}\right\| \\ mes\left(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_1M_2}\right) \equiv 0\,[2\pi] \end{cases}$$

1. *Calculer l'affixe v_0 du vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ et l'affixe v_1 du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$*

✓ *Les points M_0, M_1 et M_2 ayant été définis ci-dessus, pour tout entier naturel non nul n, on définit M_{n+1} à partir des points M_n et M_{n-1} par :*

$$\begin{cases} \left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\| = r\left\|\overrightarrow{M_{n-1}M_n}\right\| \\ mes\left(\overrightarrow{M_{n-1}M_n}, \overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right) \equiv 0\,[2\pi] \end{cases}$$

On obtient ainsi une suite M_0, M_1, ... M_n et la figure obtenue en traçant les segments $[M_0M_1]$, $[M_1M_2]$, ... $[M_nM_{n+1}]$... est appelée "polygone"

On note v_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$

Je m'entraîne en Mathématiques

2. *Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = re^{i\theta}v_{n-1}$*

   a- *En déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique*

   b- *Déduire l'expression de v_n en fonction de n, r et θ*

3. *Dans cette question, on suppose $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$*

   - *Calculer v_n pour $0 \leq n \leq 3$*
   - *Placer M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 en prenant 8cm pour unité graphique*

Partie B

Dans toute la suite du problème $0 < r < 1$ et, pour tout $n \geq 0$, on note z_n l'affixe du point M_n

1. *Calculer z_0, z_1 et z_2*

2. *Pour tout $n \geq 0$, exprimer v_n en fonction de z_n et z_{n+1}*

   a- *En déduire, que pour tout $n \geq 1$, $z_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$*

   ✓ *On rappelle que pour tout nombre $z \neq 1$, on a :*

$$1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

3. *Pour tout $n \geq 0$, calculer z_n en fonction de n, r et θ*

4. *Démontrer que le module du nombre complexe*

$$z_n - \frac{1}{1 - re^{i\theta}}$$

   tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$

5. *Soit Ω le point d'affixe ω tel que : $\omega = \frac{1}{1-re^{i\theta}}$*

✓ *Interpreter géométriquement le résultat de la question **4.***

6. *Pour tout $n \geq 0$, on note z'_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}_n$*

   a- *Calculer z'_n en fonction de n, r et θ*

   b- *Établir qu'il existe un nombre complexe a non nul tel que pour tout $n \geq 1$,*

$$z'_n = az'_{n-1}$$

7. *En interprétant géométriquement la relation précédente, déterminer une similitude directe f telle que, pour tout $n \geq 1$, $f(M_{n+1}) = M_n$*

✓ *Préciser le centre, le rapport et l'angle de similitude*

8. *Dans cette question, on suppose $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$*

   a- *Calculer dans ce cas, les coordonnées du point Ω et placer ce point sur la figure précédemment tracée*

9. *Indiquer une construction géométrique simple de M_n connaissant Ω et M_{n-1} et placer les points M_5, M_6, M_7 et M_8 sur la figure*

Exercice 80. *On considère l'application f suivante :*

$$f : \quad \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow IR$$
$$x \rightarrowtail \tan(x)$$

1. *Démontrer que f est une bijection*

2. *On notera g la bijection réciproque de l'application f*

✓ *On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$*

   a- *Démontrer que l'on a :*

$$\forall x \in IR, \quad g'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

3. *Calculer les intégrales suivantes :*

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{1 + x}\, dx \quad ; \quad K = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1 + \sin^2(x)}\, dx$$

Exercice 81. *Dans une urne, il y a n boules rouges et $2n$ boules blanches*

On tire simultanément p boules de l'urne avec $p < n$

- *Si $n = 5$ et $p = 4$, calculer les probabilités des événements suivants :*

  A: Obtenir deux boules rouges et deux boules blanches

  B: Obtenir au moins une boule blanche

Je m'entraîne en Mathématiques

✓ *On donnera les résultats sous forme de fraction irréductibles*

1. *On suppose $p = 2$ et n un entier naturel quelconque tel que $n \geq 2$*

   a- *Calculer la probabilité p_n d'obtenir deux boules de même couleur*

   b- *Démontrer que la suite $(p_n)_{n\geq 2}$ est majorée par 1*

   c- *Quel est le sens de variation de $(p_n)_{n\geq 2}$?*

2. *Déduire que la suite $(p_n)_{n\geq 2}$ est convergente et calculer sa limite*

Problème 44. *Pour tout entier naturel n, on considère les fonctions f_n dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & si\ n = 0 \\ \\ \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} & si\ n \geq 1 \end{cases}$$

On désignera par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$ ayant pour unité graphique $4cm$

Partie A

1. *Étudier la parité des fonctions f_n*

2. *Déterminer les limites de f_0 aux bornes de son ensemble de définition*

✓ *Étudier le sens de variation de f_0 et construire (C_0)*

3. *Démontrer que toutes les courbes (C_n) $(n \in IN)$ ont deux points communs*

4. *Dans cette question, on suppose que n est non nul*

• *Pour tout réel x, calculer $f'_n(x)$ où f'_n est la fonction dérivée de f_n*

5. a- *Déterminer les limites de f_1 et f_2 en $-\infty$ et en $+\infty$*

   b- *Étudier le sens de variation de chacune des fonctions f_1 et f_2 et dresser leurs tableaux de variation*

   c- *Démontrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à (C_1) en $+\infty$ et préciser la position de (C_1) par rapport à cette asymptote*

✓ *Tracer (C_1) et $(_2)$ dans le même repère que (C_0)*

Partie B

Soit (I_n) la suite réelle définie sur IN par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

1. *Pour tout entier naturel n, démontrer que : $I_n \geq 0$*

2. *Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :*

$$\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2}} \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$$

3. *En déduire la limite de (I_n) quand n tend vers $+\infty$*

4. *On partage le segment $[0,1]$ en cinq segments de même amplitude égale à $0,2$ par les points $a_0 = 0$; $a_1 = 0,2$; $a_2 = 0,4$; $a_3 = 0.6$; $a_4 = 0.8$; $a_5 = 1$*

   a- *Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel i tel que $0 \leq i \leq 4$:*

$$0,2 f_0(a_{i+1}) \leq \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(x)\,dx \leq 0,2 f_0(a_i)$$

   b- *Pour tout entier naturel i tel que $1 \leq i \leq 5$*

   ✓ *calculer $f_0(a_i)$ à 10^{-2} par défaut et par excès*

   ✓ *En déduire un encadrement de I_0*

5. a- *A l'aide d'une intégration par parties de I_n, démontrer que,*

$$\forall n \in IN, \quad I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+1)(I_n + I_{n+1})$$

   b- *Exprimer I_1 en fonction de I_0 et donner un encadrement de I_1*

Problème 45. *Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul*

On considère la fonction f_n dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^n e^{-x}$

On appelle (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$. Unité $3cm$

Partie A

Je m'entraîne en Mathématiques

1. a- *Calculer les limites de f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$*
   b- *Étudier le sens de variation de la fonction f_1 et dresser son tableau de variation*
   c- *Tracer la tangente à l'origine à (C_1), puis tracer (C_1)*

2. a- *Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, étudier le sens de variation de f_n*
   b- *Calculer les limites de f_3 en $-\infty$ et en $+\infty$ et dresser son tableau de variation*
   c- *Sur une autre figure, tracer la tangente à l'origine à (C_3) puis tracer (C_3)*

3. *On note S_n la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $x = n$, (C'_n) l'image de (C_n) par S_n*

   a- *M étant le point de coordonnées (x, y), calculer les coordonnées (x', y') de son image M' par S_n*
   b- *Démontrer que (C'_n) est l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient :*

$$y = f_n(2n - x)$$

   c- *Tracer (C'_3) dans le même repère que (C_3)*
   d- *Pour $x \leq 2n$, on pose : $g_n(x) = f_n(2n - x)$*
   ✓ *En interprétant géométriquement les intégrales, justifier que :*

$$\int_n^{2n} f_n(t)\,dt = \int_0^n g_n(t)\,dt$$

4. *Pour tout x élément de $]0, n]$, on pose : $h_n(x) = \ln[g_n(x)] - \ln[f_n(x)]$*

   a- *De l'étude des variations de h_n, déduire le signe de $h_n(x)$*
   b- *Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, n]$, on a : $f_n(x) \leq g_n(x)$*
   c- *Déduire de ce qui précède, l'inégalité :*

$$\int_0^n f_n(t)\,dt \leq \int_0^{2n} f_n(t)\,dt$$

Partie B

Pour tout réel x, on pose :

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$$

1. *Démontrer que la fonction F_n est croissante sur $[0, +\infty[$*

2. *A l'aide d'une intégration par parties :*

   a- *Calculer $F_1(x)$*
   b- *Démontrer que :*

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \forall n \in IN^*, \qquad F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$$

3. *En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :*

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \forall n \in IN^*, \qquad F_n(x) = n!\left[1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right)\right]$$

4. a- *Démontrer que :*

$$\lim_{x \to +\infty} F_n(x) = n!$$

   b- *Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, on a : $F_n(x) \leq n!$*

Partie C

1. *Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :*

$$F_n(n) + \int_n^{2n} f_n(t)\,dt \leq n!$$

2. *Déduire des résultats des parties **A** et **B** que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :*

$$0 \leq F_n(n) \leq \frac{n!}{2} \qquad et \qquad \frac{1}{2}e^n \leq 1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + ... + \frac{n^n}{n!} \leq e^n$$

Je m'entraîne en Mathématiques